Équations différentielles d'ordre 2

On va maintenant étudier des équations différentielles

- linéaires
- d'ordre 2
- aux coefficients constants

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Le procédé est le même :

1. On résout l'équation homogène ($f(x) = 0$).
   Les solutions aura la forme : $y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.
2. On trouve une solution particulière $y_p(x)$.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$$

L'équation homogène

- On commence avec la solution de l'équation homogène.
- Comme d'habitude, une équation différentielle linéaire veut des exponentielles.
- On tente la solution $y(x) = e^{rx}$, r une constante.
- On met cette solution dans léquation :

$$
\begin{aligned}
ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= 0, \\
ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0, \\
ar^2 + br + c &= 0,
\end{aligned}
$$

- Cette dernière équation s'appelle “l'équation caractéristique”.

L'équation caractéristique

- L'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

- Ses solutions :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

- Trois cas :
  1. Cas simple : $\Delta > 0$: Deux solutions réelles.
  2. Cas pervers : $\Delta = 0$: Une solution réelle.
  3. Cas complexe : $\Delta < 0$: Deux solutions complexes.

Le cas simple

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation caractéristique à deux solutions :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- La solution homogène est donc :

$$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

- Y en a-t-il d'autres ? (exercices)

Le cas simple : Exercices

1. Résolvez $y'' + y' - 2y = 0 \ldots$
   1.1 Donnez la solution générale. $y(x) = Ae^{x} + Be^{-2x}$.
   1.2 Appliquez les conditions $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. $y(x) = \frac{2}{3}e^{x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$.
   1.3 …les conditions $y(0) = 1$, $y(1) = 2$. $y(x) = \frac{2-e^{-2}}{e-e^{-2}}e^{x} + \frac{e-2}{e-e^{-2}}e^{-2x}$.
   1.4 …les conditions $y(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$. $y(x) = e^{-2x}$.
2. Résolvez $y'' - 3y' + 2y = 0 \ldots$
   2.1 Donnez la solution générale. $y(x) = Ae^{x} + Be^{2x}$.
   2.2 Appliquez les conditions $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. $y(x) = 2e^{x} - e^{2x}$.
   2.3 …si possible, les conditions $y(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$. pas possible
   2.4 …si possible, les conditions $y(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$. $B > 0$.
   2.5 …si possible, les conditions $y(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$. pas possible
3. Donnez la solution générale $y'' + 3y' + y = 0$. $y(x) = Ae^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + Be^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}$
4. Trouvez une équation différentielle homogène d'ordre 2 dont une solution est $y(x) = e^{4x}$. $y'' - 3y' - 4 = 0$.

Le cas pervers

- Rappel : de l'équation différentielle à l'équation caractéristique :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \;\Rightarrow\; ar^2 + br + c = 0.$$

- Solutions de l'équation caractéristique :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

- Cas pervers : $\Delta = 0$.
- L'équation caractéristique a une solution réelle. Donc nous avons :

$$y_1(x) = C_1 e^{rx} + ?$$

Il y a une autre solution $y_2(x)$ (tentez une solution $y_2(x) = v(x)e^{rx}$ ...)

Le cas pervers : Exercices

1. Un cas pervers : $y'' + 2y' + y = 0$.
   1.1 Trouvez la solution $y_1(x)$. $y_1(x) = Ce^{-x}$.
   1.2 Démontrez que $y_2(x) = xy_1(x)$ est aussi une solution.
   Mettez-la dans l'équation.
   1.3 Y en a-t-il d'autres ? Pourquoi ? Non, nous avons deux solutions indépendantes.
2. Trouvez la solution générale de $2y'' + 6y' - y = 0$.
   $y(x) = Ae^{\frac{-3+\sqrt{11}}{2}x} + Be^{\frac{-3-\sqrt{11}}{2}x}$.
3. Trouvez la solution générale de $4y'' + 4y' + y = 0$.
   $y(x) = Ae^{x/2} + Bxe^{-x/2}$.
4. Trouvez la solution générale de $2y'' + y' + 3y = 0$.
   $y(x) = Ce^{\frac{-1+i\sqrt{23}}{4}x} + (\cdots)^*$.

Le cas complexe

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation caractéristique à deux solutions **complexes** :

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

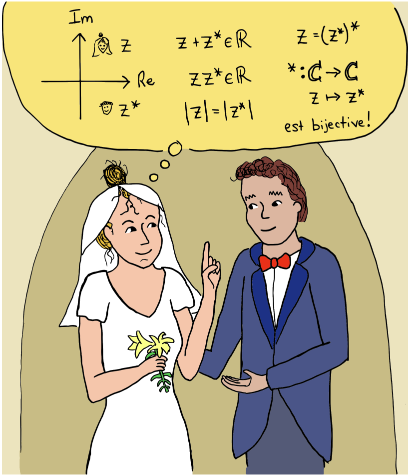
- On aimerait suivre le cas simple et écrire :

$$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

- Problème : $y(x)$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  Or, notre solution est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- Deux notions à maîtriser :
  1. Le conjugué complexe,
  2. L'exponentielle complexe.

Le conjugué complexe

- Conjugué (conjugale, conjointe)
  “Sous le même joug”, “mariage”
- Le nombre complexe $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ a un conjugué $z^* = a - bi$.
- Équation caractéristique : $r_1 = r_2^*$.
- Soit $w, z \in \mathbb{C}$:
  - $(z + w)^* = z^* + w^*$,
  - $(zw)^* = z^* w^*$,
  - $(\sqrt{z})^* = \sqrt{z^*}$,
  - $(e^z)^* = e^{z^*}$.



Le conjugué complexe

- Une identité très utile pour nous :

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}[z]\,.$$

Très important : $z + z^*$ est réel.

- Pour voir, soit $z = a + ib$. Alors $z^* = a - ib$.

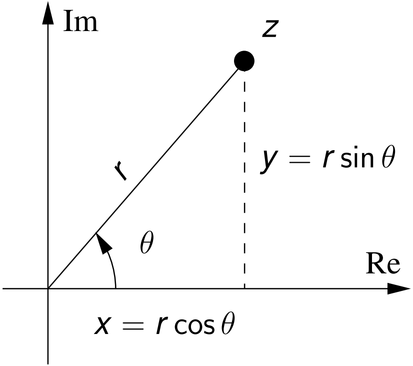
$$z + z^* = a + ib + (a - ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}[z]\,.$$

- Exercices : Pour chaque z, calculez $z + z^*$:
  - $z = 3 + 7i$. $z + z^* = 6$.
  - $z = 3 - \frac{562}{3} i$. $z + z^* = 6$.
  - $z = (3 + 7i)(2 - 3i)$. $z + z^* = 54$.
  - $z = (a + ib)^2$. $z + z^* = a^2 - b^2$.

L'exponentielle complexe

Il y a un lien mystique entre l'exponentielle, le sinus, et les coordonnées polaires.

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$
- $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$
- Forme cartésienne $z = x + iy$.
- Forme polaire $z = r^{i\theta}$.
- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$



Exercices

1. Exprimez en forme polaire : $1+i$, $1-i$, $-1-i$. $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$.
2. Exprimez en forme cartésienne : $e^{i\pi/2}$, $e^{-i\pi/3}$, $e^{i\pi}+1$. i, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 0.
3. Pour chaque z, calculez $z+z^*$:
   - 3.1 $z = e^{i\theta}$. $z+z^* = 2\cos\theta$.
   - 3.2 $z = ie^{i\theta}$. $z+z^* = -2\sin\theta$.
   - 3.3 $z = e^{(3+2i)x}$. $z+z^* = 2e^{3x}\cos 2x$.
   - 3.4 $z = e^{(3-2i)x}$. $z+z^* = 2e^{3x}\cos 2x$.
   - 3.5 $z = e^{(-2+i)x} + e^{(1-2i)x}$. $z+z^* = 2e^{-2x}\cos x + 2e^{x}\cos 2x$.
   - 3.6 $z = e^{(-2+i)x}e^{(1-2i)x}$. $z+z^* = 2e^{-x}\cos x$.
   - 3.7 $z = (2+i)e^{(2+i)x}$. $z+z^* = 2e^{2x}(2\cos x - \sin x)$.
   - 3.8 $z = (A+iB)e^{(2+i)x}$. $z+z^* = 2e^{2x}\left[A\cos x - B\sin x\right]$
   - 3.9 $z = (A+iB)e^{(a+ib)x}$. $z+z^* = 2e^{ax}\left[A\cos bx - B\sin bx\right]$

     (Très important pour la suite !)
4. Exprimez comme une exponentielle complexe :
   - 4.1 $y(x) = e^{-2x}\cos x$. $e^{(-2+i)x} + (\cdots)^*$
   - 4.2 $y(x) = e^{3x}\sin 2x$. $-ie^{(3+2i)x} + (\cdots)^*$
   - 4.3 $y(x) = \cos(\omega t + \phi)$ $e^{i\phi}e^{i\omega t} + (\cdots)^*$

Revenons à la solution de notre équation ...

Le conjugué complexe

- Rappelez notre équation (homogène) :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Si on admettait les solutions complexes, la solution serait :

$$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad C_1, C_2, r_1, r_2 \in \mathbb{C}.$$

- On sait que $r_1 = r_2^*$. Si on choisissait $C_1 = C_2^*$, la solution serait réelle. Notre solution est donc :

$$y_H(x) = Ce^{rx} + C^* e^{r^* x} = Ce^{rx} + (Ce^{rx})^* = Ce^{rx} + (\cdots)^*.$$

- y_H est à valeurs dans $\mathbb{R}$, bien qu'on l'écrive en utilisant les nombres complexes.
  En physique on traite souvent des quantités qui doivent être réelles.

Obtenir la forme réelle pure

- Exprimons $y(x) = Ce^{rx} + (\cdots)^*$ en fonctions réelles.
- Soit $C = A + iB$, $r = a + ib$.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= Ce^{rx} + (\cdots)^* \\
&= (A + iB)e^{(a+ib)x} + (\cdots)^* \\
&= e^{ax}(A + iB)(\cos bx + i \sin bx) + (\cdots)^* \\
&= e^{ax}(A \cos bx - B \sin bx) + ie^{ax}(A \sin bx + B \cos bx) + (\cdots)^*
\end{aligned}
$$

  $(\cdots)^*$ veut dire “conjugué complexe du terme à gauche”.
- Mais on sait que $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}[z]$.
  Il faut se soucier seulement de la partie réelle.
- Et donc :
$$y(x) = 2e^{ax}(A \cos bx - B \sin bx).$$
- C’est la solution donnée dans le livret, p. 27.

La dérivée

- Si on veut injecter cette solution dans l'équation, il faut la dériver !

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{d}{dx}\left[2e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right] \\
&= 2\alpha e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + 2\beta e^{\alpha x}(-A\sin\beta x + B\cos\beta x). \\
&= 2e^{\alpha x}\left[(\alpha A + \beta B)\cos\beta x + (\alpha B - \beta A)\sin\beta x\right].
\end{aligned}
$$

- Qui veut calculer y'' ?
- Mais si on calcule avec l'exponentielle complexe :

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{d}{dx}\left[Ce^{rx} + (\cdots)^*\right] \\
&= Cre^{rx} + (\cdots)^* \\
y''(x) &= Cr^2 e^{rx} + (\cdots)^*
\end{aligned}
$$

- Calculez avec l'exponentielle complexe autant que possible !

Le cas complexe : conclusion

Si l'équation caractéristique a des solutions complexes, la solution de l'équation homogène est

$$y_H(x) = Ce^{rx} + (\cdots)^*, \quad C \in \mathbb{C}$$

ou

$$y_H(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x - B \sin \beta x).$$

avec les relations $r = \alpha + i\beta$, $2C = A + iB$.
la constante complexe C contient deux constantes réelles.

Le cas complexe : Exercices

1. Résolvez $y'' + y = 0 \ldots$
   1.1 Donnez la solution générale en forme exponentielle. $y(x) = Ce^{ix} + (\cdots)^*$.
   1.2 …et en termes de fonctions purement réelles $y(x) = A\cos x + B\sin x$.
   1.3 Appliquez les conditions $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. $y(x) = \cos x = \frac{1}{2}e^{ix} + (\cdots)^*$.
2. Résolvez l'équation de l'oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$:
   2.1 Donnez la solution générale en forme exponentielle. $x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + (\cdots)^*$.
   2.2 …et en termes de fonctions purement réelles. $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$.
   2.3 Appliquez les conditions $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$. $x(t) = a\cos\omega_0 t = \frac{a}{2}e^{i\omega_0 t} + (\cdots)^*$.
3. Résolvez l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$:
   3.1 Donnez la solution générale en forme exponentielle.
   $y(x) = Ce^{(-1+i)x} + (\cdots)^*$.
   3.2 …et en termes de fonctions purement réelles $y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$.
   3.3 Déterminez $\lim_{x\to\infty} y(x)$. $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.
4. Trouvez une équation différentielle homogène d'ordre 2 dont une solution est $y(x) = \sin 4x$. $y'' + 16y = 0$.

Équations inhomogènes

[Voir alternativement le livret p. 27-28]
Rappelez l'équation complète :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On a vu comment trouver la solution homogène ($f(x) = 0$).
Il faut maintenant trouver une solution particulière $y_p(x)$.
La solution générale est

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$$

Remarquez qu'il n'y a pas de constante à déterminer dans la solution particulière. Celle-ci est totalement déterminée par l'équation.
La méthode de plus facile pour trouver y_p est de deviner sa forme, puis tenter une solution de cette forme.
Regardons quelques possibilités pour $f(x)$ ...

Quoi essayer ?

Si le second membre est …	Tentons une solution de la forme …
$f(x)$	$y_p(x)$
1	C_0
x	$C_1 x + C_0$
x^2	$C_2 x^2 + C_1 x + C_0$
polynôme d'ordre n	polynôme d'ordre n
$e^{mx}, m \notin \{r_1, r_2\}$	Ce^{mx}
$e^{mx}, m \in \{r_1, r_2\}$	Cxe^{mx}
$e^{mx}, m = r_1 = r_2, (\Delta = 0)$	$Cx^2 e^{mx}$
$xe^{mx}, m \neq r_1, r_2$	$(C_0 + C_1 x)e^{mx}$
$\vdots$	$\vdots$

Quelques exemples …

Le polynôme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Si $f(x)$ est un polynôme, tentez $y_p(x)$ un polynôme du même ordre.

Exemple : Trouvez la solution particulière de

$$y'' + 2y' - 2y = 1 + x^2.$$

- On essaie $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c à déterminer.
- Nous avons $y_p'(x) = 2ax + b$, $y_p''(x) = 2a$.
- On injecte dans dans l'équation ...

$$(2a) + (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 1 + x^2$$

- On groupe les termes par puissance de x :

$$(2a + b - 2c) + (2a - 2b)x - 2ax^2 = 1 + x^2$$

Polynôme, acte 2

$$(2a + b - 2c) + (2a - 2b)x - 2ax^2 = 1 + x^2$$

- Les coefficients des puissances de x de chaque coté doivent être égaux :

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= 1 \\ 2a - 2b &= 0 \\ -2a &= 1 \end{aligned}$$

- En résolvant : $a = b = -1/2$, $c = -5/4$.
- Donc : $y_p(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4}$.

L'exponentielle

Et maintenant, revenons à notre fonction préférée !!

- Si $f(x) = Ae^{mx}$ ($m \in \mathbb{C}$) :
  - On tente simplement $y_p(x) = Ce^{mx}$.
  - L'équation nous dira quelle valeur donner à C.
- **Exception (pervers) !** Si e^{mx} fait partie de la solution homogène, il faut tenter $y_p(x) = Cxe^{mx}$.
- **Exception (encore plus pervers) !** Si xe^{mx} fait partie de la solution homogène, il faut tenter $y_p(x) = Cx^2e^{mx}$.

L'exponentielle Acte 2

- Résolvons
$$y'' + 2y' - 2y = e^{(-1+2i)x}.$$
- Les solutions de l'équation caractéristique est $y_H(x) = Ae^{(-1+\sqrt{3})x}$. Donc $m = -1 + 2i$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique.
- On tente donc $y_p = Ce^{(-1+2i)x}$:

$$\begin{aligned} C(1+2i)^2 e^{(-1+2i)x} + 2C(1+2i)e^{(-1+2i)x} - 2Ce^{(-1+2i)x} &= e^{(-1+2i)x}. \\ C(1+2i)^2 + 2C(1+2i) - 2C &= 1. \\ C\left[-3+8i\right] &= 1. \end{aligned}$$

- On obtient donc $C = \dfrac{1}{-3+8i} = \dfrac{-3-8i}{73}$.

Produits du sinus et de l'expontielle (réels)

- Si $f(x) = e^{\alpha x}\,(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$:
  - Écrivez $f(x) = A(e^{mx} + e^{m^* x})$, $A \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{C}$.
  - Trouvez la solution particulière de e^{mx} en utilisant la méthode ci-dessus.
  - Prenez le conjugué complexe pour avoir la solution particulière de $e^{m^* x}$.
  - Faire la somme des deux solutions, puis multiplier par A.
  - Voir le livret p. 28.

Exponentielle et polynôme

- Si $f(x) = P(x)e^{mx}$, où $P(x)$ est un polynôme, $m \in \mathbb{C}$.
- On tente $y_p(x) = Q(x)e^{mx}$, où $Q(x)$ est le même ordre que $P(x)$.
- On l'injecte dans l'équation, et on trouve les coefficients de $Q(x)$.
  (Comme pour le polynôme ci-dessus.)
- Exception en cas de perversité :
  Si m est une solution de l'équation caractéristique :
  - Tentez $y_p(x) = xQ(x)e^{mx}$ (cas simple ou cas complexe).
  - Tentez $y_p(x) = x^2Q(x)e^{mx}$ (cas pervers).
- Voir le livret p. 28.