C'est quoi une équation différentielle ?

- **Une équation différentielle** est une équation qui contient une fonction inconnue et certaines de ses dérivées.
- Une équation différentielle **d'ordre** n est une équation différentielle qui contient des dérivées de la fonction inconnue jusqu'à l'ordre n.
  - Soit y la fonction inconnue.
  - Soit x la variable indépendante.
    y est une fonction de x
  - Une équation différentielle a la forme :

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

  - Une équation différentielle est définie sur un intervalle $\mathbb{I}$.
- **Résoudre** une équation différentielle veut dire identifier toutes les fonctions $y(x)$ qui la vérifient (sur $\mathbb{I}$).

C’est quoi une équation différentielle linéaire ?

- Une équation différentielle est **linéaire** si on peut l’écrire sous la forme :
$$\mathcal{L}(y) = f(x),$$
où
$$\mathcal{L}(y) = a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \ldots + a_n(x)y^{(n)}.$$
  - $\mathcal{L}$ est un **opérateur**, c’est-à-dire une fonction qui associe un résultat à une *fonction* (et non pas un nombre).
  - Exemple d’opérateur : la dérivée $\dfrac{d}{dx}$.
  - $f(x), a_0(x), \ldots a_n(x)$ sont des fonctions “habituelles”
- La plupart des équations qu’on sait résoudre sont linéaires.

Équations différentielles linéaires

Un peu de vocabulaire :

- Rappelez notre équation différentielle linéaire :

$$\mathcal{L}(y) = f(x),$$

- Le coté gauche $\mathcal{L}(y)$ s'appelle **le premier membre.**
- Le coté droit $f(x)$ s'appelle **le second membre.**
- Si $f(x) = 0$, on dit que l'équation est **homogène**
  (ou il n'y a pas de second membre).
- On dit que l'opérateur $\mathcal{L}$ est **linéaire** parce que
  - $\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2)$.
  - $\mathcal{L}(cy) = c\mathcal{L}(y)$.

Exercices

Dites si les opérateurs suivants sont linéaires :

1. $\mathcal{D}(f) = \frac{df}{dx}$ ou $\mathcal{D} = \frac{d}{dx}$. oui.
2. $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. oui.
3. $\mathcal{A}(f) = 2f(x)$. oui.
4. $\mathcal{B}(f) = 2f(x) + 1$. non.
5. $\mathcal{C}(f) = [f(x)]^2$. non.
6. $\mathcal{D}^2(f) = \frac{d^2 f}{dx^2}$ ou $\mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dx^2}$. oui.
7. $\mathcal{E}(f) = e^{-x^2} f(x)$ oui.

Dites si chacune des équations suivantes sont linéaires ou non, homogènes ou non.

1. $f'(x) + xf(x) = 0$. linéaire et homogène.
2. $f'(x) + [f(x)]^2 = 0$. non-linéaire, homogène.
3. $f^{(3)}(x) - (3x^2 + 2)f'(x) - f(x) + x = 0$. linéaire, inhomogène.
4. $[f''(x)]^3 - (3x^2 + 2)f'(x) - f(x) + x = 0$ non-linéaire, beurk.

Résolution d'une équation différentielle linéaire

- On veut résoudre notre équation linéaire

$$\mathcal{L}(y) = f(x).$$

Rappelez qu'il faut trouver **toutes** les solutions !

- Quelle est la structure de l'ensemble de solutions ?
- Il faut d'abord définir **l'équation homogène associée**

$$\mathcal{L}(y) = 0.$$

- **Proposition :** Les solutions sont de la forme

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x),$$

où

  - $y_p(x)$ est une solution particulière,
  - $y_h(x)$ parcourt **toutes** les solutions de $\mathcal{L}(y) = 0$.

Résolution d'une équation différentielle linéaire

Démonstration

1. $y_p + y_h$ est bien une solution :

$$\mathcal{L}(y_p + y_h) = \mathcal{L}(y_p) + \mathcal{L}(y_h) = f(x) + 0 = f(x)$$

2. Toute solution peut être écrite sous la forme $y_p + y_h$:
   - Soit $y_1(x)$, $y_2(x)$ deux solutions.
   - On choisit $y_p(x) = y_1(x)$. Avec ce choix :
     - On peut écrire $y_1(x) = y_p(x) + y_h(x)$ avec $y_h(x) = 0$.
     - On peut écrire $y_2(x) = y_p(x) + y_h(x)$ avec $y_h(x) = y_2(x) - y_1(x)$.

Exercices

1. Démontrez que $y(x) = 0$ est bien une solution de $\mathcal{L}(y) = 0$.
2. Démontrez que $y(x) = y_2(x) - y_1(x)$ est bien une solution de $\mathcal{L}(y) = 0$.

Stratégie de Résolution

- On est confronté avec l'équation différentielle linéaire

$$\mathcal{L}(y) = f(x).$$

- On reste calme !
- On trouve **toutes** les solutions de l'équation homogène associée :

$$\mathcal{L}(y) = 0.$$

- On trouve **une** solution $y_p(x)$ de l'équation complète.
- Les solutions sont alors de la forme

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x),$$

  où

  - $y_p(x)$ est une solution particulière,
  - $y_h(x)$ parcourt **toutes** les solutions de $\mathcal{L}(y) = 0$.

Superposition

- Supposons qu'on peut séparer le second membre en deux termes comme ceci :
$$\mathcal{L}(y) = f_1(x) + f_2(x).$$
- Supposons qu'on connaît :
  - Une solution $y_1(x)$ de $\mathcal{L}(y) = f_1(x)$.
  - Une solution $y_2(x)$ de $\mathcal{L}(y) = f_2(x)$.
- Démontrez que $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation complète.

Equations d'ordre 1

- On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = \tilde{f}(x).$$

- On la met dans **la forme résolue** :

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x).$$

- On doit faire attention : a-t-on divisé par 0 ?
  Si oui, il faut isoler les points dangereux.

On considère trois formes

1. Intégrale directe : $a(x) = 0$.
2. Équation homogène : $f(x) = 0$.
3. L'équation complète : $a(x) \neq 0, f(x) \neq 0$.

Intégrale directe

On cherche les solutions de

$$y'(x) = f(x).$$

Il faut faire une intégrale !
Il convient de clairement distinguer trois sortes d'intégrale…

Rappel des intégrales

1. $F(x)$ est une **primitive** de f ssi
$$F'(x) = f(x).$$
La primitive n'est pas unique : $F(x) + C$ est aussi un primitive de f.
2. **L'intégrale indéfinie** est l'ensemble de toutes les primitives. On écrit :
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$
3. **L'intégrale définie** est le nombre
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$
   - Ici a et b sont deux nombres où f est définie.
   - La valeur de C ne modifie pas l'intégrale définie.

Quelle intégrale faut-il donner pour résoudre $y'(x) = f(x)$?

Exemples

Résolvez :

1. $y'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad y(x) = \log x + C.$
2. $y'(x) = e^{ax}$ $\qquad y(x) = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$
3. $y'(x) = xe^{-x^2}$ $\qquad y(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$
4. $y'(x) = b'(x)$ $\qquad y(x) = b(x) + C.$

Équation homogène

On cherche les solutions de

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Il y a deux méthodes :

1. Séparation des variables
   La méthode la plus directe.
   Pourrait marcher pour certaines équations non-linéaires.
   Mais il y a un aspect “magie noire”.
2. Proposition d’une solution exponentielle.
   La méthode qui se généralise aux autres cas.
   (Les équations différentielle linéaire **adorent** l’exponentiel !)

Il utile de maîtriser les deux méthodes.

Séparation des variables

La méthode

1. On écrit $y' = \frac{dy}{dx}$, puis on traite dy et dx comme s'ils étaient des vulgaires nombres.
2. On cherche à isoler x et dx sur une coté de l'équation, et y et dy sur l'autre.
3. On fait un intégrale indéfinie sur les deux cotés. On n'oublie pas la constante d'intégration !

Mais a-t-on vraiment le droit à faire ça ?
Pourquoi ou pourquoi pas ?

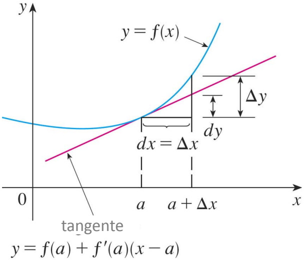
Rappel : différentielle pour une fonction d'une variable

$y = f(x)$, la différentielle de la fonction f au point x est la fonction qui à dx associe dy = $f'(x)dx$.

La figure montre la relation entre l'incrément Δy et dy.

- Δy représente le changement de hauteur sur le graphe $y = f(x)$.
- dy représente le changement de hauteur sur la tangente

lorsque x varie d'une quantité dx.



Rappel de differentielle

- Avec le plan tangent, plus besoin de la notion “infiniment petit”.
- Un calcul avec les différentiels est un calcul qui utilise une approximation linéaire.
- Ce calcul devient exacte dans le limite $dx \to 0$.
- Dans le cas de l’intégrale directe :

$$y'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad dy = f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int dy = \int f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int f(x)\, dx + C$$

Exercices

Résolvez :

1. $y' - xy = 0.$ $y(x) = Ce^{x^2/2}$
2. $y' - \frac{y}{x} = 0.$ $y(x) = Cx.$
3. $y'y = x$ (non-linéaire et inhomogène, mais ça marche !) $y(x) = \pm x.$

Solution exponentielle

- On tente une solution de la forme $y(x) = e^{u(x)}$, où $u(x)$ est une fonction qu'on ne connaît pas encore.
- On transforme l'équation pour $y(x)$ en une équation pour $u(x)$:

$$\begin{aligned} \left[e^{u(x)}\right]' + a(x)e^{u(x)} &= 0, \\ u'(x)e^{u(x)} + a(x)e^{u(x)} &= 0, \\ u'(x) + a(x) &= 0 \end{aligned}$$

  (On peut toujours diviser par $e^{u(x)}$ car l'exponentiel n'est jamais nul.)
- Soit $A(x)$ un primitive de $-a(x)$.
  L'intégrale indéfinie est alors $-\int a(x)\,dx = A(x) + C$.
- La fonction inconnue est donc $u(x) = A(x) + C$.

Solution exponentielle

- On obtient une infinie des solutions $y(x) = e^{A(x)+C_1}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Mais, a-t-on toutes ?
  Toutes nos solutions sont positives. Y-a-il des négatives ? Celles qui changent de signe ?
- Tenter $y(x) = v(x)e^{A(x)}$, où $v(x)$ est une fonction pas encore connue.

$$\begin{aligned} \left[ve^A\right]' + av &= 0, \\ v'e^A - av + av &= 0, \\ v'e^A &= 0, \\ v' &= 0. \\ v &= C_2. \end{aligned}$$

- L'ensemble des solutions sont alors

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \quad A(x) \text{ une primitive de } -a(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Concrètement . . .

On pourrait mémoriser la solution, mais :

- On peut se tromper en cours de l'examen.
- On ne peut pas expliquer ce qu'on fait.
- Après l'examen, on oublie tout (car à quoi ça sert ?)

Mieux :

- Tenter une solution $y(x) = e^{u(x)}$ et faire ce qui vient naturallement.

Solution exponentielle - exemples

Échauffements :

Dériver ces fonctions.

($a \in \mathbb{R}$ est une constante, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions “gentilles” (à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, connue, et dérivable).)

1. $f(x) = e^{ax}$ $\qquad f'(x) = ae^{ax} = af(x).$
2. $f(x) = e^{-x^2}$ $\qquad f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2xf(x).$
3. $f(x) = e^{b(x)}$ $\qquad f'(x) = b'(x)e^{b(x)} = b'(x)f(x).$

Exemples :

1. $y' + xy = 0.$ $\qquad y(x) = Ce^{-x^2/2}$
2. $y' - \frac{2y}{x} = 0.$ $\qquad y(x) = Cx^2.$
3. $y' - \frac{y}{x+1} = 0.$ $\qquad y(x) = C(x+1).$
4. $y' + ay = 0.$ $\qquad y(x) = Ce^{-ax}.$

L'équation complète

On cherche les solutions de

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x).$$

Il faut **deux** étapes :

1. On trouve **toutes** les solutions $y_h(x)$ de l'équation homogène associée.
   On met $f(x) = 0$ et on utilise une méthode présentée ci-dessus.
2. One trouve **une** solution $y_p(x)$ qui prend en compte le membre de droite.

Les solutions de l'équation sont :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Où avec le résultat de la partie précédente :

$$y(x) = Ce^{A(x)} + y_p(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Méthode de Solution

Comment trouver une solution particulière ?

- Toutes les méthodes sont bonnes ! Si on ne peut pas la diviner :
- On tente une solution $y_p(x) = v(x)y_h(x)$, (p : particulière) $v(x)$ est une fonction pas encore connue.

$$\begin{aligned} [vy_H]' + avy_h &= f, \\ v'y_h + vy_h' + avy_h &= f, \\ v'y_h + v\left[y_h' + ay_h\right] &= f. \end{aligned}$$

  $[\cdots] = 0$ car y_h est une solution de l'équation homogène.
- On obtient une équation on pourrait (peut-être) intégrer :

$$v'y_h = f$$

Les conditions initiales

- En physique, une équation différentielle est souvent accompagnée des conditions initiales.
  Le PFD est souvent accompagné par la position et vitesse initiale.
- Les conditions initiales permet de sélectionner **une** des solutions de l'équation.
- Le plus souvent, on donne la valeur de la solution à $x = 0$:

$$y(0) = y_0.$$

- On utilise cette information pour trouver la constante C :

$$y(0) = Ce^{A(0)} + y_p(0) = y_0.$$

Exemples

1. $y' + xy = x$.
    1.1 Rappelez les solutions homogènes. $y_h(x) = Ce^{-x^2/2}$.
    1.2 Trouvez une solution particulière. $y_p(x) = 1$ par exemple.
    1.3 Écrivez la solution générale. $y(x) = Ce^{-x^2/2} + 1$.
    1.4 Condition initiale $y(0) = 0$. $y(x) = 1 - e^{-x^2/2}$.
    1.5 Condition initiale $y(0) = 1$. $y(x) = 1$.
    1.6 Condition initiale $y(0) = 2$. $y(x) = 1 + e^{-x^2/2}$.
    1.7 Tracez les graphes.
2. $y' + 2y = 1$
    2.1 Trouvez les solutions homogènes. $y_h(x) = Ce^{-2x}$.
    2.2 Trouvez une solution particulière. $y_p(x) = 1/2$ par exemple.
    2.3 Écrivez la solution générale. $y(x) = Ce^{-2x} + 1/2$.
    2.4 Condition initiale $y(0) = -1/2$. $y(x) = -e^{-2x}/2 + 1/2$.
    2.5 Condition initiale $y(0) = 0$. $y(x) = 1/2$.
    2.6 Condition initiale $y(0) = 1/2$. $y(x) = e^{-2x}/2 + 1/2$.
    2.7 Tracez les graphes.
3. $y' + 2y = \cos x$. Trouvez une solution particulière.
   indice : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. $y_p(x) = (2\cos x - \sin x)/5$.

Un peu de nostalgie

(Mécanqiue S1 TD 5 Exo 4)

Une petite goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à l'action de l'air, supposée proportionnelle à la vitesse, soit $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}$. On introduit un axe Oz orienté vers le bas. A $t = 0$ la goutte d'eau est lâchée depuis l'origine O sans vitesse initiale.

1. Quelles sont les dimensions et unités SI de β ?
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique.
3. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la vitesse v.
4. **Résoudre** cette équation avec la condition initiale.
5. Déduire l'existence dune vitesse limite v_ℓ que l'on exprimera en fonction de m, β et g.
6. La solution contient un facteur de la forme $e^{-t/\tau}$. Exprimer τ en fonction de v_ℓ. Que signifie τ ? Quelles sont ses dimensions ?
7. A.N. : $m = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg}$, $v_\ell = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calculez τ et β, et le rayon de la goutte R.

Solution

1. Dimensions : $\dfrac{\text{Force}}{\text{vitesse}} = \dfrac{\text{masse}}{\text{temps}}$, Unités SI : $\dfrac{\text{N}}{\text{m/s}} = \text{kg}\,\text{s}^{-1}$.
2. $m\ddot{z} = -\beta\dot{z} + mg$.
3. $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{\beta}{m} v = g$.
4. C'est une équation différentielle linéaire inhomogène d'ordre 1 :
   4.1 Solution homogène : $v_H = Ce^{-(\beta/m)t}$.
   4.2 Solution particulière : $v_P = mg/\beta$.
   4.3 Solution générale : $v = mg/\beta + Ce^{-(\beta/m)t}$.
   4.4 Pour la condition initiale $v(0) = 0$: $C = -mg/\beta$.
   La solution : $y(x) = \dfrac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-(\beta/m)t}\right)$.
5. Quand $t \to \infty$, $v \to v_\ell = mg/\beta$.
   La solution devient plus jolie : $y(x) = v_\ell\left(1 - e^{-(\beta/m)t}\right)$.
6. $\tau = m/\beta = v_\ell/g$:
   La solution devient encore plus jolie : $y(x) = v_\ell\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.
   τ est un temps : le temps caractéristique pour atteindre la vitesse limite.
7. $\tau = 5 \times 10^{-4}$ s, $\beta = 2 \times 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{s}^{-1}$.
   On peut estimer la taille de la goutte, sachant que la masse volumique de l'eau est $\rho = 1 \times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$. D'abord, son volume $V = m/\rho = 1 \times 10^{-9}\,\text{m}^3 = 4\pi R^3/3$, donc son rayon $R \approx 0.6$ mm, ce qui me semble un peu gros pour quelque chose qui tomberait dans l'air avec $v_\ell = 5 \times 10^{-3}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Mais comme dit Obélix, "Qui est gros ?!".