Chapter 1

Introduction

1.1 Motivation

L'invention du calcul différentiel, à la fin du XVIIème siècle, par Newton et par Leibniz (de façon indépendante) a permis de résoudre de nombreux problèmes réputés jusque-là insolubles par le calcul analytique. Le nouveau « calcul » a très vite fait ses preuves. L'introduction du calcul différentiel a aussi permis la mise en équation de nouveaux types de problèmes. Un nouveau défi pour les mathématiques est alors apparu : comment résoudre ces équations ?

Quel que soit le domaine disciplinaire, lorsqu'on cherche à modéliser (c'est à dire donner un modèle mathématique pour décrire un problème affectant le monde réel), le modèle prend le plus souvent la forme d'une équation différentielle qui contient une fonction inconnue et certaines de ses dérivées successives (première, seconde, etc). Ce n'est pas étonnant car ce qu'on cherche généralement à prévoir c'est l'évolution, le comportement à venir, et on essaie de le prévoir à partir de la mesure immédiate du changement du système étudié.

Prenons un exemple (très classique) en dehors du champ de la physique : un modèle de croissance de la population est fondé sur l'hypothèse que la population croit à un rythme proportionnel à la taille de cette population (plus il y a d'individus, plus il y a de naissances, le nombre de naissances étant proportionnel au nombre d'individus). C'est une hypothèse fondée tant qu'il n'y a pas de limitation pour cause d'épuisement des ressources, ou du fait de pandémies, ou de prédateurs particulièrement actifs. Si nous voulons traduire cette hypothèse mathématiquement, nous arrivons à l'équation :

$$\frac{dy}{dt} = ky, \tag{1.1}$$

dans laquelle t est le temps, y le nombre d'individu dans la population et k est la constante de proportionnalité entre le taux d'accroissement dy/dt de la population et la taille de la population y.

Cette équation est une équation différentielle, puisqu'elle relie la fonction inconnue $y(t)$ à sa dérivée. On connaît déjà des fonctions qui ont le genre de propriété que doit vérifier y : la fonction qui à t associe $\exp(kt)$ a pour dérivée $k\exp(kt)$. Elle est donc une solution de l'équation différentielle. Notons que $C\exp(kt)$ (où C est une constante quelconque) peut convenir également. Il y a donc une infinité de solutions possibles (vous vérifierez au paragraphe 2 que toutes les solutions de l'équation ont bien cette forme). On notera cependant que toutes ne correspondent pas à une solution physiquement (ou biologiquement !) acceptable, car y ne peut pas être négative. Si y est de la forme $C\exp(kt)$ et qu'on prend $t = 0$, on voit que $y(0) = C$, donc C correspond alors à la population initiale.

Intéressons-nous maintenant à un autre exemple que vous connaissez sans doute déjà. Considérons le mouvement d'un objet de masse m suspendu au bout d'un ressort pendu verticalement.[1] Si le ressort est allongé (ou comprimé) d'une longueur x par rapport à sa longueur naturelle, il exerce une force proportionnelle à x : $-kx$ (en orientant l'axe vertical de manière arbitraire), k

[1] S1 physique mécanique, TD 8, Exercice 6.

est une constante (de raideur) positive. Si on ignore toute forme de frottement, on obtient alors, par application du principe fondamental de la dynamique :

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{1.2}$$

Cette équation du mouvement de l'objet est également une équation différentielle. On dit qu'elle est du second ordre parce qu'elle implique une dérivée seconde (notée ici $\ddot{x}$) de la fonction à déterminer. L'équation de l'exemple précédent était du premier ordre (elle impliquait la dérivée première de la fonction à déterminer).

1.2 Équations différentielles linéaires

1.2.1 Définition

On obtient fréquemment des équations différentielles du second ordre en mécanique, en application du principe fondamental de la dynamique (qui est une équation différentielle du second ordre à partir du moment où on sait exprimer les forces qui s'appliquent sur un objet en fonction de la position et/ou de la vitesse de l'objet). La résolution de ce genre d'équation (du second ordre) fait l'objet du troisième paragraphe de ce chapitre. Les équations d'ordre un sont abordées au paragraphe 2.

De façon générale, une **équation différentielle d'ordre n** est une équation faisant intervenir une fonction ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n. L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.3}$$

ou F est une fonction de $n+2$ variables. Une solution à une telle équation différentielle sur l'intervalle $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y\ : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ qui est n fois continûment dérivable, telle que pour tout $x \in \mathbb{I}$, l'Eq. (1.3) soit vérifiée.

Parmi les équations différentielles certaines jouent un rôle particulier parce qu'elles sont plus fréquemment rencontrées ou parce qu'elles sont plus faciles à résoudre (ou les deux). C'est le cas des équations différentielles linéaires.

Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si et seulement si elle est de la forme

$$\mathcal{L}(y) = f(x), \tag{1.4}$$

avec

$$\mathcal{L}(y) = a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \ldots + a_n(x)y^{(n)}. \tag{1.5}$$

Dans ces équation, $\mathcal{L}$ est un **opérateur**, c'est-à-dire une fonction qui associe un résultat à une *fonction* (et non à pas un nombre, comme les fonctions habituelles). La dérivation et l'intégration sont des exemples d'opérateurs car chaque opération agit sur une fonction.

Pour que l'Eq. (1.4) soit une équation linéaire, $\mathcal{L}$ doit être linéaire. On dit qu'un opérateur $\mathcal{L}$ est linéaire si pour toute fonction y_1, y_2, $\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2)$ et si pour toute constante C et pour toute fonction y, $\mathcal{L}(Cy) = C\mathcal{L}(y)$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{L}$ est linéaire ici, car c'est une conséquence immédiate de la linéarité de la dérivation (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées et $[Cy]' = Cy'$). La linéarité est une propriété très importante qui est le fondement de la structure vectorielle, comme vous le verrez en mathématiques.[2]

On appelle le coté gauche de l'Eq. (1.4) – $\mathcal{L}(y)$ – le **premier membre**, et le coté droit – $f(x)$ – le **second membre**. Si $f(x) = 0$, on dit que l'équation est **homogène**, ou qu'elle n'a pas de second membre.

Voici quelques exemples d'équations différentielles linéaires:

$$y' + x^2 y = 3x^2, \tag{1.6}$$

$$y' \sin x + y \cos x = x^2. \tag{1.7}$$

[2] L'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables muni de l'addition des fonctions et du produit d'une fonction par un scalaire est un espace vectoriel sur le corps des scalaires. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire est un sous-espace.

Voici quelques équations qui **ne sont pas** des équations différentielles linéaires du premier ordre:

$$y' + y^2 = 3x^2, \tag{1.8}$$

$$y' + \sin y = x^2. \tag{1.9}$$

Exercices Dites si chacune des équations suivantes sont linéaires ou non, homogènes ou non.

1. $f'(x) + xf(x) = 0.$ linéaire et homogène.
2. $f'(x) + [f(x)]^2 = 0.$ non-linéaire, homogène.
3. $f^{(3)}(x) - (3x^2 + 2)f'(x) - f(x) + x = 0.$ linéaire, inhomogène.
4. $[f''(x)]^3 - (3x^2 + 2)f'(x) - f(x) + x = 0$ non-linéaire, beurk.

1.2.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire

Résoudre une équation différentielle veut dire identifier toutes les fonctions $y(x)$ qui la vérifient sur l'intervalle $\mathbb{I}$.

Proposition : Les solutions de l'équation $\mathcal{L}(y) = f(x)$ sont de la forme $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$, où $y_p(x)$ est une solution particulière de l'équation, et $y_h(x)$ parcourt toutes les solutions de l'équation homogène associée : $\mathcal{L}(y) = 0$.

Démonstration : il est facile de voir que toute fonction de la forme $y_p + y_h$ est solution de l'équation $\mathcal{L}(y) = f(x)$, en effet $\mathcal{L}(y_p + y_h) = \mathcal{L}(y_p) + \mathcal{L}(y_h) = f(x) + 0 = f(x)$. D'autre part, si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle, alors on peut voir y_1 comme la solution particulière y_p et pour toute autre solution y_2 : $\mathcal{L}(y_1 - y_2) = \mathcal{L}(y_1) - \mathcal{L}(y_2) = f(x) - f(x) = 0$, donc $y_h = y_1 - y_2$ est une solution de l'équation homogène, on a bien $y_2 = y_p + y_h$.

Le principe de résolution des équations linéaires d'ordre 1 et 2 qui vous sera présenté dans les paragraphe suivants adopte cette démarche :

1. On commence par trouver **toutes** les solutions y_h de l'équation homogène associée,[3]

2. puis on trouve **une** solution (n'importe laquelle) y_p de l'équation complète.

L'ensemble des solutions de l'équation complète est donc

$$y_p(x) + y_h(x), \tag{1.10}$$

où $y_h(x)$ parcourt toutes les solutions de $\mathcal{L}(y) = 0$.

Si nous revenons au premier exemple que nous avions abordé (croissance de la population), reprenons cette équation mais en y mettant un second membre :

$$y' - ky = 1 \tag{1.11}$$

Les solutions de l'équation homogène sont les $C\exp(kt)$ comme on l'a indiqué antérieurement. Il faut trouver une solution particulière de l'équation complète. On vérifie facilement qu'une solution constante existe : $y_p = -1/k$ convient. Les solutions de l'équation sont donc : $-1/k + C\exp(kt)$, où C est une constante.

1.3 Équations différentielles non-linéaires

Avant de passer à la description complète de la méthode de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1, attardons-nous une dernière fois sur l'équation décrivant la croissance d'une

[3]Comme vous le verrez en mathématiques, cette résolution est facilitée par le fait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un sous espace vectoriel de dimension n de l'espace des fonctions n fois continûment dérivables (c'est le noyau de $\mathcal{L}$). Quand l'ordre n est égal à 1, les solutions forment une droite vectorielle donc il suffit de trouver une solution non nulle, toutes les autres lui sont proportionnelles. Quand n est égal à 2, il faut trouver deux solutions indépendantes y_1 et y_2 qui vont donc former une base de l'espace des solutions : toutes les solutions seront des combinaisons linaires de y_1 et y_2.

population. Comme on l'a dit cette équation ($y' = ky$) est adaptée à la modélisation de la croissance d'une population dans des conditions idéales. Ce qui veut dire qu'il faut un modèle plus élaboré pour prendre en compte le fait que l'environnement ne fournit que des ressources limitées. Généralement, les populations commencent par croître de manière exponentielle puis la croissance diminue lorsque la population approche d'un capacité maximum K que peut supporter l'environnement (si on dépasse K, la population va même diminuer). Une équation simple qui permet de rendre compte de ce comportement est l'équation différentielle logistique (proposée par le mathématicien hollandais Pierre François Verhulst vers 1840) :

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right). \tag{1.12}$$

On voit que lorsque y est petit devant K, $1-y/K$ est proche de 1, $y' \approx ky$, on retrouve la croissance exponentielle, si y se rapproche de K, la croissance ralentit et devient négative (décroissance) quand y est plus grand que K.

Une autre observation est que cette équation différentielle n'est plus linéaire (il y a un terme quadratique). Nous verrons en exercice comment ramener certaines équations différentielles non linéaires à des cas connus par changement de variable, cependant, il faut bien être conscient qu'en général, on ne sait pas résoudre les équations non-linéaires. Ce qui ne veut pas dire qu'on ne peut pas les étudier, mais cette étude est surtout qualitative. Les questions que l'on se pose concernent l'existence et l'unicité des solutions, l'étude de leur domaine de définition, le comportement des solutions au bornes du domaine, la stabilité des solutions par perturbations... Tout ceci constitue un premier pas vers un champ plus large : la théorie des systèmes dynamiques.

Chapter 2

Équations Différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Définitions

2.1.1 Forme générale

Si on fixe $n = 1$ dans les Eqs. (1.4) et (1.5), on obtien une **équation différentielle linéaire du premier ordre**:

$$a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = g(x). \tag{2.1}$$

Dans cette équation, x est un nombre réel, $y(x)$ est une fonction inconnue de x à valeur réelle, et $a_1(x)$, $a_2(x)$, et $g(x)$ sont des fonctions connues. L'équation se vérifie pour x variant dans un intervalle $\mathbb{I}$.

Cette équation s'appelle **différentielle** parce qu'elle fait apparaître la dérivée $y'(x)$ de la fonction inconnue.

Cette équation s'appelle **linéaire** parce que la fonction inconnue $y(x)$ n'apparaît que dans une combinaison linéaire de y et de y', qui nous écrirons toujours sur la coté gauche de l'équation. Si

y et y' apparaissaient d'une autre façon, l'équation ne serait pas linéaire.

Cette équation s'appelle **du premier ordre** parce qu'elle ne fait apparaître la dérivée du premier ordre $y'(x)$.

2.1.2 Forme résolue

Si on peut diviser l'Eq. (2.1) par $a_1(x)$, on obtient la **forme résolue**:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x). \tag{2.2}$$

Si $a_1(x) = 0$ pour une ou plusieurs valeurs de x en $\mathbb{I}$, nous rencontrons un problème. On peut souvent contourner cette difficulté en divisant l'intervalle $\mathbb{I}$ en sous-intervalles $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$ de telle sorte que $a_1(x) \neq 0$ à l'intérieur de chacun de ces sous-intervalles.[1]

L'Eq. (2.2) est le point du départ de toutes les méthodes de solution que nous verrons ci-dessous.

Par la suite, on supposera qu'on traite un intervalle où $a(x)$ et $f(x)$ sont continues. On traitera trois formes différentes de Eq. (2.2):

1. L'intégrale directe: $a(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{I}$.

2. L'équation homogène: $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{I}$.

3. L'équation complète: Ni $a(x)$ ni $f(x)$ n'est identiquement nulle sur $\mathbb{I}$.

2.2 Linéarité et superposition

Avant de chercher des solutions des équations différentielles linéaires, remarquons quelques propriétés importantes de ses solutions.

[1] Cette stratégie ne marche que si $a_1(x)$ a des zéros isolés. Contre-exemple: $a(x) = \sin(\frac{1}{x})$, où les zéros s'accumulent vers $x = 0$.

2.2.1 Linéarité du premier membre

Linéarité: Considérez l'équation homogène:

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0. \tag{2.3}$$

Supposons que nous avons trouvé deux solutions y_1 et y_2 de Eq. (2.1). Alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution, comme on peut voir en injectant $y_1 + y_2$ dans l'Eq. (2.3):

$$\begin{aligned} [y_1 + y_2]' + a(x)\,[y_1 + y_2] &= 0, \\ \left[y_1' + a(x)y_1\right] + \left[y_2' + a(x)y_2\right] &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Chaque terme $[\cdots]$ dans la deuxième ligne est nul, car y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène.

Maintenant, multiplions l'Eq. (2.3) par le nombre réel λ:

$$\begin{aligned} \lambda y'(x) + \lambda a(x)y(x) &= 0. \\ [\lambda y(x)]' + a(x)\,[\lambda y(x)] &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

On voit donc que si $y(x)$ est une solution, alors $\lambda y(x)$ l'est aussi. Remarquons que λ peut être positif ou négatif; on a donc des solutions des deux signes. On peut aussi mettre $\lambda = 0$. Donc $y(x) = 0$ est une solution.[2]

2.2.2 Principe de Superposition

Maintenant, considérez l'équation complète (2.2). Supposons qu'on peut écrire le second membre comme une somme de deux termes: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Supposons en plus que y_1 est la solution de

$$y' + a(x)y = f_1(x), \tag{2.6}$$

et y_2 est la solution de

$$y' + a(x)y = f_2(x), \tag{2.7}$$

alors $y_1 + y_2$ est la solution de l'équation avec le second membre complet.

[2]Les mathématiciens diraient que les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel.

2.3 L'intégrale

L'équation différentielle du premier ordre qui est la plus facile à résoudre est le cas où $a(x) = 0$:

$$y' = f(x). \tag{2.8}$$

La solution est simplement l'intégrale de $f(x)$.

2.3.1 Rappels sur l'intégrale

Il convient de clairement distinguer trois sortes d'intégrale.

On dit $F(x)$ est une **primitive** d'une fonction f si, et seulement si

$$F'(x) = f(x), \tag{2.9}$$

en chaque point x où f est définie. Remarquons que la primitive n'est pas unique: si $F(x)$ et la primitive de $f(x)$, alors $F(x) + C$ l'est aussi (C une constante).

Puisque la primitive n'est pas unique, on définit: **L'intégrale indéfinie** est l'ensemble de toutes les primitives. On écrit:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{2.10}$$

Notez que l'intégrale ne possède pas de bornes.

L'intégrale indéfinie est à distinguer de l'intégrale définie: **L'intégrale définie** est le nombre

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2.11}$$

Ici a et b sont deux nombres où f est définie. Remarquons que la valeur de C ne modifie pas l'intégrale définie.

Pour résumer:

1. La primitive est une fonction,

2. L'intégrale indéfinie est un ensemble de fonctions,

3. L'intégrale définie est un nombre.

2.3.2 Solution

La solution de l'équation Eq. (2.8) est donc simplement l'intégrale indéfinie de f:

$$y(x) = \int f(x)\, dx = F(x) + C. \tag{2.12}$$

Ici, C est une constante qui n'est pas fixée par l'équation. Sa valeur doit être déterminée par des informations supplémentaires (En physique, ces informations sont souvent les conditions initiales.)

Exercices

1. $y'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad y(x) = \log x.$
2. $y'(x) = e^{ax}$ $\quad y(x) = \frac{1}{a}e^{ax}.$
3. $y'(x) = xe^{-x^2}$ $\quad y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$
4. $y'(x) = b'(x)$ $\quad y(x) = b(x).$

2.4 Proposition d'une solution exponentielle

Maintenant, considérez l'équation homogène:

$$y' + a(x)y = 0. \tag{2.13}$$

Proposons une solution

$$y(x) = e^{u(x)}, \tag{2.14}$$

où $u(x)$ est une fonction que nous ne connaissons pas encore. Cette proposition ne peut pas représenter toutes les solutions, car elle est toujours positive.

En injectant la solution proposée, on obtient

$$\begin{aligned} \left[e^{u(x)}\right]' + a(x)e^{u(x)} &= 0, \\ u'(x)e^{u(x)} + a(x)e^{u(x)} &= 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Puisque l'exponentielle n'est jamais nulle, on peut tranquillement multiplier l'équation par $e^{-u(x)}$:

$$u'(x) + a(x) = 0. \tag{2.16}$$

Cette équation a la forme de l'Eq. (2.8). La fonction $u(x)$ est donc l'intégrale indéfinie de $-a(x)$:

$$u(x) = -\int a(x)\,dx = -A(x) + C_1, \tag{2.17}$$

où A est une primitive de a. En remontant à l'inconnue y:

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} = Ce^{-A(x)}. \tag{2.18}$$

où $C = e^{C_1}$ est une constante positive. Cette solution est toujours positif, car elle vient de l'Eq. (2.14).

Dans Sec. 2.2.1, nous avons vu que nous pouvons multiplier une solution de l'équation homogène par un nombre réel, et obtenir une nouvelle solution. Si on multiplie Eq. (2.18) par -1, on obtient une solution qui est toujours négative. On peut aussi multiplier Eq. (2.18) par 0 pour obtenir la solution $y(x) = 0$. Toutes ses solutions peut être écrites sous la forme de l'Eq. (2.18) si on permet C de prendre la valeur de n'importe quel nombre réel.

$$y(x) = Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad A(x) = \int a(x)\,dx. \tag{2.19}$$

Mais il nous reste une dernière doute à lever. A-t-on trouver toutes les solutions? Des solutions qui sont tantôt positive, tantôt négative ne seraient pas capturées par notre procédé, car on ne peut pas écrire des telles fonctions sous la forme d'une exponentielle.

Pour lever cette dernière doute, tentons une solution de la forme:

$$y(x) = v(x)e^{-A(x)}, \tag{2.20}$$

où $v(x)$ est une fonction qu'on ne connaît pas encore.[3] On peut écrire toutes les fonctions sous cette forme, et donc on pourrait l'utiliser pour identifier toutes les solutions de notre équation. Par exemple, rien n'empêche $v(x)$ de changer de signe, et donc on va voir si l'équation a des solutions qui change de signe.

En mettant Eq. (2.20) dans l'Eq. (2.13), on obtient

$$\begin{aligned}\left[ve^{-A}\right]' + ave^{-A} &= 0,\\ v'e^{-A} + vA'e^{-A} + ave^{-A} &= 0,\\ v'e^{-A} &= 0.\end{aligned} \tag{2.21}$$

La dernière ligne nous dit que $v'(x) = 0$, ou que $v(x)$ est une constante. On ne retrouve donc pas des nouvelles solutions. L'Eq. (2.19) donne donc toutes les solutions de l'équation homogène Eq. (2.13).

Ceux qui préfèrent appliquer des formules peuvent utiliser l'Eq. (2.18) tandis que ceux qui préfèrent résoudre l'équation peuvent proposer la solution $y = e^{u(x)}$ et voir ce que $u(x)$ doit être.[4]

Exercices:

1. $y' + xy = 0.$ $\quad y(x) = Ce^{-x^2/2}$

2. $y' - \frac{2y}{x} = 0.$ $\quad y(x) = Cx^2.$

3. $y' - \frac{y}{x+1} = 0.$ $\quad y(x) = C(x+1).$

4. $y' + ay = 0.$ $\quad y(x) = Ce^{-ax}.$

[3]Cette méthode porte le nom paradoxal de "variation de la constante" car la solution proposée ressemble à $y(x)$ de l'Eq. (2.19), sauf que la constante C est remplacée par la fonction $v(x)$.

[4]La deuxième méthode est préférable, car il est plus facile de rappeler, et on vérifie que sa solution est correcte lors du calcul.

2.5 Équation avec Second membre

2.5.1 Méthode de Résolution

On cherche maintenant les solutions de l'équation complète :

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x). \tag{2.22}$$

Les solutions de cette équation ont la forme

$$y(x) = Cy_H(x) + y_P(x) \tag{2.23}$$

où y_H est une **solution homogène**, c'est-à-dire une solution (non-nulle) de $y' + a(x)y = 0$,[5] et y_P est la **solution particulière**, c'est-à-dire une solution de l'équation complète. C est une constante qui n'est pas déterminée par l'équation.

La solution y_H est à trouver en utilisant l'une des méthodes ci-dessus (Sec. 2.4 ou Sec. 2.6).

Pour trouver la solution particulière y_P, on propose

$$y_P(x) = v(x)y_H(x). \tag{2.24}$$

où $v(x)$ est une fonction que nous ne connaissons pas encore. Il s'agit d'exactement la même forme de solution proposée dans la Sec. 2.4, à l'Eq. (2.21). Quand on injecte cette proposition dans l'équation différentielle, les calculs se déroulent exactement comme avant:

$$\begin{aligned} [vy_H]' + avy_H &= f, \\ v'y_H + vy_H' + avy_H &= f, \\ v'y_H + v\left[y_H' + ay_H\right] &= f. \end{aligned}$$

La quantité $[\cdots] = 0$ car y_H est une solution de l'équation homogène. On obtient donc

$$v'(x) = \frac{f(x)}{y_H(x)} \tag{2.25}$$

[5] Le terme $Cy_H(x)$ corresponde à $y_h(x)$ dans l'Eq. (1.10). La constante C peut prendre la valeur de n'importe lequel nombre réel. C'est ainsi que $y_h(x) = Cy_H(x)$ parcourt toutes les solutions de l'équation homogène.

Il faut “simplement” calculer la primitive pour obtenir $v(x)$.
Exercices

1. $y' + xy = x$.
   (a) Rappelez la solution homogène. $y_H(x) = Ce^{-x^2/2}$.
   (b) Trouvez la solution particulière. $y_P(x) = 1$.
   (c) Écrivez la solution générale. $y(x) = Ce^{-x^2/2} + 1$.
   (d) Condition initiale $y(0) = 0$. $y(x) = 1 - e^{-x^2/2}$.
   (e) Condition initiale $y(0) = 1$. $y(x) = 1$.
   (f) Condition initiale $y(0) = 2$. $y(x) = 1 + e^{-x^2/2}$.
   (g) Tracez les graphes.

2. $y' + 2y = 1$
   (a) Trouvez la solution homogène. $y_H(x) = Ce^{-2x}$.
   (b) Trouvez la solution particulière. $y_P(x) = 1/2$.
   (c) Écrivez la solution générale. $y(x) = Ce^{-2x} + 1/2$.
   (d) Condition initiale $y(0) = -1/2$. $y(x) = -e^{-2x}/2 + 1/2$.
   (e) Condition initiale $y(0) = 0$. $y(x) = 1/2$.
   (f) Condition initiale $y(0) = 1/2$. $y(x) = e^{-2x}/2 + 1/2$.
   (g) Tracez les graphes.

3. $y' + 2y = \cos x$. Trouvez la solution particulière.
   indice: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. $y_P(x) = (2\cos x - \sin x)/5$.

2.5.2 Exercice: Un peu de nostalgie

On revisite un exercice du premier semestre (Mécanique S1 TD 5 Exo 4)

Une petite goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à l'action de l'air, supposée proportionnelle à la vitesse, soit $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}$. On introduit un axe Oz orienté vers le bas. A $t = 0$ la goutte d'eau est lâchée depuis l'origine O sans vitesse initiale.

1. Quelles sont les dimensions et unités SI de β?
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique.
3. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la vitesse v.
4. **Résoudre** cette équation avec la condition initiale.
5. Déduire l'existence d'une vitesse limite v_ℓ que l'on exprimera en fonction de m, β et g.
6. La solution contient un facteur de la forme $e^{-t/\tau}$. Exprimer τ en fonction de v_ℓ. Que signifie τ? Quelles sont ses dimensions?
7. A.N.: $m = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg}$, $v_\ell = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calculez τ et β, et le rayon de la goutte R.

Solution

1. Dimensions: $\dfrac{\text{Force}}{\text{vitesse}} = \dfrac{\text{masse}}{\text{temps}}$, Unités SI: $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}} = \mathrm{kg\,s^{-1}}$.
2. $m\ddot{z} = -\beta\dot{z} + mg$.
3. $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{\beta}{m}v = g$.
4. C'est une équation différentielle linéaire inhomogène d'ordre 1:
   (a) Solution homogène: $v_H = Ce^{-(\beta/m)t}$.
   (b) Solution particulière: $v_P = mg/\beta$.
   (c) Solution générale: $v = mg/\beta + Ce^{-(\beta/m)t}$.
   (d) Pour la condition initiale $v(0) = 0$: $C = -mg/\beta$.
   La solution: $y(x) = \dfrac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-(\beta/m)t}\right)$.
5. Quand $t \to \infty$, $v \to v_\ell = mg/\beta$.
   La solution devient plus jolie: $y(x) = v_\ell\left(1 - e^{-(\beta/m)t}\right)$.
6. $\tau = m/\beta = v_\ell/g$:
   La solution devient encore plus jolie: $y(x) = v_\ell\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.
   τ est un temps: le temps caractéristique pour atteindre la vitesse limite.
7. $\tau = 5 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$, $\beta = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$.
   On peut estimer la taille de la goutte, sachant que la masse volumique de l'eau est $\rho = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. D'abord, son volume $V = m/\rho = 1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^3} = 4\pi R^3/3$, donc son rayon $R \approx 0.6\,\mathrm{mm}$, ce qui me semble un peu gros pour quelque chose qui tomberait dans l'air avec $v_\ell = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Mais comme dit Obélix, "Qui est gros?!".

2.6 Séparation des variables

Il existe une deuxième méthode ces équations qui marche aussi pour certains équations non-linéaires.

On commence avec notre équation

$$y' + a(x)y = 0. \tag{2.26}$$

On groupe sur une coté de l'équation tout qui conerne y, et sur l'autre, tout qui concerne x:

$$\frac{y'}{y} = -a(x). \tag{2.27}$$

On a un petit problème ici, car si $y = 0$, même pour une seule valeur de x, la coté gauche de l'équation n'est pas définie. Grâce à la Sec. 2.4, on sait que $y(x) = 0$ est bien une solution, mais toutes les autres solutions ne sont jamais nulles. On identifie $y(x) = 0$ comme solution, la mettre de coté, et à partir d'ici, on cherche les autres.

On primitive les deux cotés de l'Eq. (2.27):

$$\log |y| = -A(x) + C. \tag{2.28}$$

En prenant l'exponentielle des deux cotés de l'équation, on retrouve Eq. (2.18).

Nous pouvons résoudre certaines équations non-linéaires avec cette méthode. Par exemple:

$$y' + y^2 = 0, \tag{2.29}$$

On note que $y(x) = 0$ est une solution. On la mettre de coté, et on cherche les autres solutions:

$$\frac{y'}{y^2} = -1, \tag{2.30}$$

$$-\frac{1}{y} = -\int dx = -x + C. \tag{2.31}$$

La solution est donc $y(x) = \dfrac{1}{-x + C}$ ou $y(x) = 0$.

Exercices:

1. $y' - xy = 0$. $y(x) = Ce^{x^2/2}$
2. $y' - \frac{y}{x} = 0$. $y(x) = Cx$.
3. $y'y = x$ (non-linéaire et inhomogène, mais ça marche!) $y(x) = \pm x$.

Chapter 3

Équations Différentielles linéaires du seconde ordre

3.1 Définition

Pour rappel, une **équation différentielle linéaire du seconde ordre** a la forme:

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \tag{3.1}$$

Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'au cas le plus simple, celui où les fonctions $a_2(x)$, $a_1(x)$, et $a_0(x)$ sont des constantes:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \tag{3.2}$$

Comme pour les équations du premier ordre, on appelle **équation homogène** une équation où $f(x) = 0$.

Les solutions d'une équation différentielle du seconde ordre possèdent les propriétés de linéarité et superposition. Les démonstrations de la Sec. 2.2 peuvent être faites avec les équations du second ordre.

3.2 Rappels sur les nombres complexes

Bien que nous cherchons $y(x)$ à valeurs réelles, il est souvent beaucoup plus facile de chercher d'abord $y(x)$ à valeurs complexes, puis restreindre l'ensemble des solutions à celles qui sont réelles. Dans la pratique, les équations de la forme Eq. (3.2) sont traitées exclusivement sur les complexes. La restriction de l'ensemble des solutions aux réelles n'est fait qu'à la fin, et souvent seulement de façon implicite.

Nous rappelons donc quelques définitions et théorèmes sur les nombres complexes. Ceux qui sont à l'aise avec ce sujet peuvent passer directement à la section suivante sans danger.

3.2.1 Définitions élémentaires

On rencontre parfois la racine carré d'un nombre négatif. Deux réponses sont possible:

1. La racine carré d'un nombre négatif nous indique que la solution qu'on cherche n'existe pas. On arrête donc le calcul.

2. On définit un nouveau nombre i, tel que $i^2 = -1$ et on procède avec le calcul comme ne rien était. Désormais, tout nombre réel non-nul α, positif ou négatif, a deux racines carrés distincts. Si $\alpha > 0$, ses racines carrées sont $\pm\sqrt{\alpha}$. Si $\alpha < 0$, ses racines carrées sont $\pm i\sqrt{-\alpha}$.

Le bon choix dépend du contexte. Le deuxième choix donne naissance aux nombres complexes.

Un **nombre complexe** z est un nombre de la forme

$$z = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1. \tag{3.3}$$

On appelle α partie réelle de z, et β la partie imaginaire. On écrit

$$\Re[z] = \alpha, \quad \Im[z] = \beta. \tag{3.4}$$

Le **conjugué complexe** d'un nombre complexe $z = \alpha + i\beta$ est le nombre complexe

$$z^* = \alpha - i\beta. \tag{3.5}$$

Si w et z sont des nombres complexes:

$$(w + z)^* = w^* + z^*, \text{ et } (wz) = w^* z^*. \tag{3.6}$$

Il s'ensuit que, si f est une fonction à valeurs complexes,

$$\big(f'(x)\big)^* = f^{*\prime}(x), \text{ et } \left(\int f(x)\,dx\right)^* = \int f^*(x)\,dx. \tag{3.7}$$

Un théorème qui sera très utile pour nous est

$$z + z^* = 2\Re[z]. \tag{3.8}$$

3.2.2 L'exponentielle complexe

On peut étendre la définition de l'exponentielle complexe à des valeurs complexes. Rappelez le développement de

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots . \tag{3.9}$$

On met $x = i\theta$ et on obtient

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{i^n x^n}{n!} + \cdots . \tag{3.10}$$

En groupant les termes réels et imaginaires on obtient

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = &\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) \\ &+ i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!}\cdots\right) \\ = &\cos\theta + i\sin\theta. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nous avons donc

$$e^z = e^{\alpha + i\beta} = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta). \tag{3.12}$$

Puisque $\sin(-\beta) = -\sin\beta$,

$$(e^z)^* = e^{z^*}. \tag{3.13}$$

3.3 L'équation homogène

3.3.1 L'équation caractéristique

On commence avec l'équation homogène:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \tag{3.14}$$

On propose une solution exponentielle $y(x) = e^{rx}$:

$$\begin{aligned} a\,[e^{rx}]' + b'\,[e^{rx}]' + c\,[e^{rx}] &= 0, \\ ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Puisque l'exponentielle n'est jamais nulle, on peut multiplier par e^{-rx} pour obtenir

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3.16}$$

Cette équation s'appelle **l'équation caractéristique**. Ses solutions sont

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac. \tag{3.17}$$

Deux solutions de l'équation différentielle homogène Eq. (3.14) sont donc

$$y_1(x) = e^{r_1x}, \text{ et } y_2(x) = e^{r_2x}. \tag{3.18}$$

Comme on a vu ci-dessus, la somme de deux solutions de l'équation homogène est aussi une solution, et une solution multipliée par une constante est aussi une solution, nous proposons comme candidat pour l'ensemble de solutions

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

On cherche à voir si toutes les solutions peuvent bien être écrites sous cette forme.

On procède comme dans la section précédente, en faisant un calcul de variation de la constante. On propose une solution de la forme

$$y(x) = v(x)e^{r_1x}, \tag{3.20}$$

où $v(x)$ est une fonction qu'on ne connaît pas encore. Toute fonction peuvent être écrite sous cette forme, et donc en cherchant solution de cette forme, nous verrons s'il existe d'autres solutions non-incluse par Eq. (3.19).

En injectant la solution proposée, on obtient:

$$\begin{aligned}
a\left[v(x)e^{r_1x}\right]'' + b\left[v(x)e^{r_1x}\right]' + c\left[v(x)e^{r_1x}\right] &= 0,\\
a\left[r_1v(x)e^{r_1x} + v'(x)e^{r_1x}\right]' + b\left[r_1v(x)e^{r_1x} + v'(x)e^{r_1x}\right]&\\
+ c\left[v(x)e^{r_1x}\right] &= 0,\\
av''(x) + [2ar_1 + b]v'(x) + [ar_1^2 + br_1 + c]v(x) &= 0,\\
av''(x) + \sqrt{\Delta}v'(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Selon le signe de Δ, on a trois cas qui doivent être examiné séparément:

1. Si $\Delta > 0$, $r_1 \neq r_2$ sont réels et distincts.
2. Si $\Delta = 0$, $r_1 = r_2$, avec r_1 réel.
3. Si $\Delta < 0$, r_1 et r_2 sont complexes, avec $r_1 = r_2^*$.

3.3.2 Deux solutions réelles

On pose $w(x) = v'(x)$ et la dernière ligne de l'Eq. (3.21) devient

$$w'(x) + \frac{\sqrt{D}}{a}w(x) = 0. \tag{3.22}$$

Nous avons résolu des équations de cette forme dans la Sec. 2. Sa solution est

$$w(x) = C_w e^{-(\sqrt{\Delta}/a)x}, \tag{3.23}$$

où C_w est une constante. Pour trouver $v(x)$, il nous faut une primitive de $w(x)$:

$$v(x) = -\frac{aC_w}{\sqrt{\Delta}}e^{-(\sqrt{\Delta}/a)x} + C_v. \tag{3.24}$$

Quand on revient à $y(x)$, nous récupérons exactement la forme de l'Eq. (3.19). Cette équation donne donc l'ensemble des solutions quand $\Delta > 0$.

3.3.3 Une solution réelle

Quand $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution $r = r_1 = r_2$. La dernière ligne de l'Eq. (3.21) devient

$$v''(x) = 0. \tag{3.25}$$

On primitive cette équation deux fois, on obtient

$$v(x) = C_1 x + C_2. \tag{3.26}$$

En remontant à $y(x)$, on obtient

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{rx}. \tag{3.27}$$

Cette équation donne donc l'ensemble des solutions quand $\Delta = 0$.

3.3.4 Deux solutions complexes

Quand $\Delta < 0$, tous les calculs déroulent exactement comme dans la Sec. 3.3.2, sauf que nous sommes confrontés par une question d'interprétation. Les solutions r_1, r_2 de l'équation caractéristique sont complexes, et donc les exponentielles dans l'Eq. (3.19) sont aussi complexes. Or, on cherche $y(x)$ à valeurs réelles.

La situation n'est pas sans espoir, car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il suffit de restreindre l'ensemble des solutions aux solutions qui sont réelles. Pour cela, il suffit de prendre C_1 et C_2 dans l'Eq. (3.19) complexe, avec $C_1 = C_2^*$. On récrit donc la solution sous la forme

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{r_1 x} + C^* e^{r_2 x}, \quad C \in \mathbb{C}. \\ &= Ce^{r_1 x} + (\cdots)^* \\ &= \Re\left[Ce^{r_1 x}\right]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dans ces équations, $(\cdots)^*$ veut dire "conjuguée complexe du terme précédente".

Pour rendre manifeste la nature réelle des solutions, écrivons $r_1 = \alpha + i\beta$ et $C = a + ib$. La solution devient alors

$$y(x) = ae^{\alpha t} \cos \beta t - be^{\alpha t} \sin \beta t. \tag{3.29}$$

Si on définit $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ tel que $a = A \cos \varphi$, $b = A \sin \varphi$, la solution prend la forme:

$$= Ae^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi). \tag{3.30}$$

Il est souhaitable de faire tous les calculs sous la forme complexe, et puis traduire dans la forme réelle seulement quand il est nécessaire. Pour vous convaincre, calculons $y'(t)$ en utilisant ces deux formes. Sous la forme complexe, nous avons

$$y'(x) = Cr_1 e^{r_1} + (\cdots)^* = \Re\left[Cr_1 e^{r_1}\right]. \tag{3.31}$$

Sous la forme réelle, nous avons

$$\begin{aligned} y'(x) &= A\alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) - A\beta e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi), \\ &= Ae^{\alpha t} \left(\alpha \cos(\beta t + \varphi) - \beta \sin(\beta t + \varphi)\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Sous la forme complexe, la deuxième dérivée est

$$y''(x) = Cr_1^2 e^{r_1} + (\cdots)^* = \Re\left[Cr_1^2 e^{r_1}\right]. \tag{3.33}$$

La deuxième dérivée sous la forme réelle est laissé comme exercice au lecteur!

3.4 Équation avec seconde membre

On considère maintenant

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \tag{3.34}$$

$f(x)$	$y_p(x)$
1	C_0
x	$C_1 x + C_0$
x^2	$C_2 x^2 + C_1 x + C_0$
polynôme d'ordre n	polynôme d'ordre n
$e^{mx}, m \notin \{r_1, r_2\}$	Ce^{mx}
$e^{mx}, m \in \{r_1, r_2\}$	Cxe^{mx}
$e^{mx}, m = r_1 = r_2, (\Delta = 0)$	$Cx^2 e^{mx}$
$e^{mx}, m \neq r_1, r_2$	$(C_0 + C_1 x)e^{mx}$
$\vdots$	$\vdots$

Table 3.1: Tableau des fonctions à essayer pour la solution particulière d'une équation différentielle linéaire inhomogène d'ordre 2. Pour chaque cas, des constantes doivent être trouvées en injectant la solution proposée dans l'équation.

On commence en trouvant la solution homogène $y_H(x)$, donné par l'une des équations (3.19), (3.27), ou (3.28), selon la signe de Δ. Ensuite on cherche une solution particulier $y_P(x)$ qui vérifie l'équation avec un second membre.

Puisqu'il ne faut qu'une solution, toutes les moyennes sont bonnes pour en trouver une. On devine sa forme en utilisant le Tableau 3.1. On cherche la forme de $f(x)$ dans le tableau, et on tente une solution de forme donnée dans le deuxième colonne. Dans chaque solution proposée, il y a des constantes il faut identifier.

Si le second membre consiste en plusieurs termes, on résout l'équation avec chaque terme séparément, puis on combine toutes les solutions, selon le principe de superposition de Sec. 2.2.2.