Corrigé du contrôle continu (1 heure)

Question de cours : *(5 points)* Démontrer, **à l'aide de suites**, les deux propriétés suivantes :

1. Toute partie fermée d'un espace métrique compact est compacte.
2. Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée.

Correction :

1. Soit F une partie fermée d'un espace métrique et compact X. Comme F est en particulier un espace métrique, d'après le **Théorème de Bolzano-Weierstrass**, pour montrer la compacité de F, il suffit de montrer que toute suite à valeurs dans F admet une valeur d'adhérence dans F. Soit $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$. En particulier, $(x_n)_n$ est à valeurs dans l'espace compact X donc $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans X, noté x (par le théorème de Bolzano-Weierstrass). Puisque F est fermé, cette valeur d'adhérence appartient à $\overline{F} = F$. Donc $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans F et donc F est compact.
2. Soit K une partie compacte d'un espace métrique X. Soit $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans K qui converge vers un élément $x \in X$. Montrons que $x \in K$. Puisque K est compact, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_n$ admet une sous-suite qui converge vers un élément $y \in K$. Mais puisque $(x_n)_n$ converge, son unique valeur d'adhérence est donnée par x (car l'espace est métrique donc séparé). Donc $x = y \in K$. On en déduit que toute suite d'éléments de K qui converge dans X, converge vers un élément de K. Ainsi, par **caractérisation séquentielle des fermés d'un espace métrique** on en déduit que K est fermé dans X.

Remarque : Il était attendu ici d'utiliser le Théorème de Bolzano-Weierstrass et la caractérisation séquentielle des fermés (ou de l'adhérence, suivant le choix de la méthode employée) qui sont deux résultats vrais dans un **espace métrique.** Il s'agissait donc de **nommer les théorèmes ou proposition du cours** utilisés et de préciser le caractère **métrique** de l'espace pour justifier l'utilisation de ces résultats. Enfin, les démonstrations n'exploitant pas les caractérisations séquentielles (consigne explicitement donnée dans l'énoncé) ont été pénalisées.

Exercice 2 : *(6 points)* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels positifs. On note pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes

$$N(u) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n|u_n| \leq +\infty.$$

1. Montrer que $(a_n)_n$ ne s'annule jamais si et seulement si N définit une norme sur

$$l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty\}.$$

   À partir de maintenant, les a_n seront supposés strictement positifs.

2. (a) On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq r > 0$. Montrer que les normes N et $\|u\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ sont des normes sur $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ équivalentes.

   (b) On suppose à présent que $(a_n)_n$ admet 0 comme valeur d'adhérence. Montrer que N et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Correction :

1. Remarquons que l'application $N : l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie puisque pour toute suite $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, la suite $(a_n|u_n|)_n$ est le terme général d'une série convergente car la suite $(a_n)_n$ est supposée bornée et à termes positifs. L'application N est à valeur positives. De plus, N est homogène et vérifie l'inégalité triangulaire puisque le module sur $\mathbb{C}$ est homogène et satisfait l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$ et par linéarité de la somme de séries convergentes.
   Supposons que la suite $(a_n)_n$ ne s'annule jamais. Soit $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, vérifiant $N(u) = 0$. Par définition de N, on a
   $$N(u) = \sum_{n \geq 0} a_n |u_n| = 0.$$
   Les termes de la série étant positifs, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n|u_n| = 0$ et puisque les $(a_n)_n$ sont non nuls, on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0.$$
   Ainsi la suite u est la suite nulle et N vérifie l'axiome de séparation et définit donc une norme.
   Réciproquement, supposons que N définit une norme. Alors N vérifie l'axiome de séparation et pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\delta^k = (\delta^k_n)_n$ désigne la suite dont le k-ème terme vaut 1 et tous les autres sont nuls, on a $N(\delta^k) = a_k \neq 0$ car la suite u^k est dans $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et n'est pas la suite nulle. D'où le résultat.

2. Par hypothèse sur sur $(a_n)_n$, il existe $M, r > 0$ tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < r \leq a_n \leq M.$$
   Alors, pour tout $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$
   $$r\|u\|_1 = \sum_{n \geq 0} r|u_n| \leq \sum_{n \geq 0} a_n|u_n| \leq M\|u\|_1,$$
   c'est à dire
   $$r\|u\|_1 \leq N(u) \leq M\|u\|_1.$$
   Donc les normes N et $\|.\|$ sont des normes équivalentes sur $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

   Supposons à présent qu'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(a_{\phi(n)})_n$ converge vers 0. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\delta^{\phi(n)}\|_1 = 1$ or
   $$N(\delta^{\phi(n)}) = a_{\phi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$
   Donc
   $$\frac{\|\delta^{\phi(n)}\|_1}{N(\delta^{\phi(n)})} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$
   Donc, les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3 : *(5 points)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n^2 à coefficients réels et on munit cet espace de la norme $\|.\|_\infty$ définie par
$$\forall M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}), \quad \|M\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|.$$

(a) On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{D}_n$ est connexe.

2. Montrer que l'ensemble des matrices réelles inversibles $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Correction :

1. Puisque la connexité par arcs implique la connexité (cf cours), il suffit de montrer que $\mathcal{D}_n$ est connexe. Nous allons en fait montrer que $\mathcal{D}_n$ est étoilé par rapport à 0. Soit $A \in \mathcal{D}_n$. Par définition d'une matrice diagonalisable, il existe $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres de A. Remarquons que pour tout $t \in [0,1]$, tA est encore diagonalisable puisque la base $(e_1, ..., e_n)$ est encore une base de vecteurs propres de tA. Alors l'application $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{D}_n$, définie par
$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma(t) = tA,$$
est bien définie et continue et relie A à la matrice nulle 0_n.
2. D'après le cours, l'image d'un espace topologique connexe par une application continue est un espace connexe. Supposons par l'absurde que $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe. L'application $\det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est continue (c'est une application polynomiale en les coefficients de la matrice) et surjective. Donc $\mathbb{R}^* = \det\big(GL_n(\mathbb{R})\big)$ est connexe. Ce qui est absurde. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Exercice 4 : *(4 points)* Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $f : X \longrightarrow X$ une application localement lipschitzienne, c'est à dire :

Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x tel que $f_{|V_x} : V_x \longrightarrow X$ est lipschitzienne.

Montrer que f est (globalement) lipschitzienne sur X.

Correction : Par hypothèse, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage de x, noté V_x et une constante $k_x > 0$ tel que
$$\forall y, z \in V_x, \quad d\big(f(y), f(z)\big) \leq k_x d(y, z).$$
Puisque dans un espace métrique, les boules forment une base de voisinages, pour tout $x \in X$, il existe un rayon $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset V_x$. Nous avons alors le recouvrement suivant :
$$X \subset \bigcup_{x \in X} B\big(x, \frac{r_x}{2}\big).$$
Les boules ouvertes étant ouvertes et puisque X est supposé compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement précédent et il existe $x_1, ..., x_N \in X$ tels que
$$X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \frac{r}{2})$$
où $r := \max_{i=1,...,N} r_{x_i}$ qui est **bien défini comme maximum d'un nombre fini de réels**. On a alors, pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour tout $z, y \in B(x_i, r_{x_i})$
$$d\big(f(y), f(z)\big) \leq kd(y, z)$$
où $k := \max_{i=1,...,N} k_{x_i}$ qui est bien défini comme maximum d'un nombre fini de réels.

Considérons à présent deux points quelconques $y, z \in X$. Puisque $y \in X$ et d'après le recouvrement précédent, il existe $1 \leq j \leq N$ tel que $y \in B\big(x_j, \frac{r}{2}\big)$.

1er cas : $z \in B\big(x_j, r\big)$.
Dans ce cas, $d\big(f(y), f(z)\big) \leq k d(y, z)$.

2ème cas : $z \notin B\big(x_j, r\big)$. Dans ce cas, $d(y, z) \geq \frac{r}{2}$. En effet, si ça n'était pas le cas, on aurait

$$d(x_j, z) \leq d(x_j, y) + d(y, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} < r,$$

ce qui n'est pas le cas car $z \notin B\big(x_j, r\big)$. On a alors

$$d(f(y), f(z)) \leq \frac{2d(f(y), f(z))}{r} d(y, z).$$

Remarquons enfin que puisque f est localement lipchitzienne, f est continue sur X. Donc, puisque X est compact, $f(X)$ est compact et donc borné. Donc, il existe $M > 0$ tel que pour tout $a, b \in X$, $d(f(a), f(b)) \leq M$. Finalement

$$d(f(y), f(z)) \leq \frac{2M}{r} d(y, z).$$

En conclusion, en posant $L := \max\left(k, \frac{2M}{r}\right)$, on a

$$\forall y, z \in X, \quad d\big(f(y), f(z)\big) \leq L d(y, z).$$