Université de Rennes 1 / ENS Rennes **TOPOLOGIE GÉNÉRALE**

Contrôle continu (1 heure)

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

NOM :	Prénom :

Exercice 1 : *(5 points)* Montrer que dans un espace topologique séparé, tout compact est fermé.

Tournez la page

Exercice 2 : *(5 points)* Soit $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ une application continue et surjective. Montrer que l'image réciproque de tout singleton par f est non bornée. (On admettra que l'image d'une boule fermée de $\mathbb{R}^2$, par une application continue, est bornée.)

Exercice 3 : *(5 points)* Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite achevée. On rappelle qu'on munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la topologie τ dont les ouverts U sont définis par les conditions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in U \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a < x < b$ et $]a, b[\subset U$
2. $-\infty \in U \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R},]-\infty, a[\subset U$
3. $+\infty \in U \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R},]a, +\infty[\subset U$

1. Montrer que l'inclusion de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est continue.

2. Décrire l'ensemble des parties connexes de $\overline{\mathbb{R}}$.

Tournez la page

Exercice 4 : *(5 points)* Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On note B la boule unité fermée et S la sphère unité. Montrer que B est compact si et seulement si S est compact.