Université de Rennes 1 et ENS Rennes

Mathématiques — L3 — Topologie Générale (TOPG, session 2) — 17 juin 2019

Durée: 2h. Les documents ne sont pas autorisés.
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans un ordre quelconque.
La rédaction et l'ordre logique des arguments devront être particulièrement soignés.

Exercice 1. *Questions de cours.*

a) Définir un espace topologique.

b) Définir la connexité pour un espace topologique. Définir la connexité pour une partie A d'un espace topologique X.

c) Définir une distance sur un ensemble X.

d) Soient X et Y deux espaces topologiques. Définir la topologie produit sur l'ensemble $X \times Y$. Caractériser les suites convergentes à valeur dans $X \times Y$.

e) Soit (X, d) un espace métrique. Définir la topologie associée à la distance d. On fixe $x_0 \in X$. Montrer que l'application $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, x_0)$ est continue pour cette topologie. Est-ce que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue pour la topologie produit ? (justifier).

Exercice 2.

Soit l'espace métrique $X = \mathbb{Q}$ muni de la distance induite par la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que X n'est pas connexe. X est-il séparé ? compact ?

b) On considère la série de fonctions

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad x \in X$$

Montrer que, pour tout $x \in X$ tel que $|x| < 1$, la série $S(x)$ converge dans X.

c) Pour $x \in X$, on considère la suite

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Montrer que, pour tout $x \in X$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans X.

d) Montrer que la suite $(T_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$, vue comme suite de X, n'est pas convergente. On pourra admettre que $e \notin \mathbb{Q}$.

(tournez la page)

Exercice 3.

On pose $X := C^0([0,1];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

a) Montrer que $|f|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\, dx}$ définit une norme sur X. Dans tout l'exercice, X est muni de la topologie associée à cette norme.

b) On note

- $\varphi_0(f) := f(1/2)$,
- $\varphi_1(f) = \int_0^1 f(x)dx$,

Montrer que φ_0 et φ_1 sont des formes linéaires sur X.

c) Montrer que φ_1 est continue et calculer sa norme.

d) Montrer que φ_0 n'est pas continue.

e) En déduire que l'espace $\{f \in X; f(\frac{1}{2}) = 0\}$ n'est pas fermé dans X.

f) Montrer que les espaces

$$F_1 = \{f \in X; \quad \forall x \in [0, \tfrac{1}{2}], \quad f(x) = 0\}$$

et

$$F_2 = \{f \in X; \quad \forall x \in [\tfrac{1}{2}, 1], \quad f(x) = 0\}$$

sont fermés dans X, et que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

g) Montrer que $F_1 \oplus F_2$ n'est pas fermé dans X.

h) Donner une norme sur X pour laquelle φ_0 est continue (justifier).

i) Soit $f \in X$. Soit (x_n) une suite dans $[0,1]$. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |f(x_n)| \leqslant 1/n.$$

Montrer que f admet un zéro dans $[0,1]$. Que peut-on dire si (x_n) est une suite qui énumère tous les rationnels de $[0,1]$? (justifier)

(fin de l'énoncé)