Mathématiques — L3 — Topologie Générale (TOPG, session 2) — 17 juin 2019 Correction

**Exercice 1.**

**a-d)** Voir cours.

**e)** $f(x) = d(x, x_0)$ est continue car Lipschitzienne (inégalité triangulaire: voir cours). On peut définir la topologie de $X \times X$ par la distance

$$\mathbf{d}_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

(cours). Montrons que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est 1-Lipschitzienne. Par intégalités triangulaires, on a $d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2)$ donc

$$d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2) \leqslant d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) = \mathbf{d}_1((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

(et de même en intervertissant $x$ et $y$). CQFD.

**Exercice 2.**

**a)** Puisque $\sqrt{2} \notin X$, $X = (X \cap ]-\infty, \sqrt{2}[) \cup (X \cap ]\sqrt{2}, +\infty[)$, union de deux ouverts de $X$ disjoints non vides, donc n'est pas connexe (cours). $X$ est métrique (valeur absolue) donc séparé. $X$ n'est pas borné donc pas compact.

**b)** Si $x \in \mathbb{Q}$, $x^n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 0$, donc $S(x)$ est bien une série dans $X$ (c'est-à-dire que la suite des sommes partielles est bien une suite dans $X$). Si $|x| < 1$, la série (géométrique) $S(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $1/(1-x)$ qui est bien rationnel, donc dans $X$. Puisque la distance sur $X$ est la distance induite par celle de $\mathbb{R}$, on en déduit que la série converge dans $X$. (Écrire la définition de la convergence pour s'en convaincre !)

**c)** La série entière a un rayon de convergence infini, on sait bien qu'elle converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la suite des sommes partielles est convergente (donc de Cauchy) dans $\mathbb{R}$. Or, si $x \in X$, chaque terme $T_n(x)$ est en fait dans $X$. Donc la suite $(T_n(x))_n$ est de Cauchy dans $X$.

**d)** Pour $x = 1$ on sait que la série converge vers $e - 1 = \exp(1) - 1$ dans $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que la suite $T_n(1)$ est convergente dans $X$, vers un certain $z \in X$. Autrement dit

$$|T_n(1) - z| \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

donc elle converge vers $z$ dans $\mathbb{R}$ également. Par unicité de la limite dans l'espace métrique $\mathbb{R}$, on a $z = e - 1$, donc $e = z + 1 \in \mathbb{Q}$. Or $e \notin \mathbb{Q}$, contradiction.

**Exercice 3.**

**a)** Remarquons d'abord que $X$ est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On vérifie les axiomes de la norme (cours). Pour l'inégalité triangulaire, c'est l'inégalité de Minkowski. (cours, c'est la norme $L^2$).

**b)** On vérifie $\varphi_j(f + \lambda g) = \varphi_j(f) + \lambda \varphi_j(g)$, pour tous $f, g \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

**c)** La continuité est équivalente à l'existence de la norme subordonnée (cours). Par Cauchy-Schwarz (pour la deuxième inégalité),

$$|\varphi_1(f)| \leqslant \int_0^1 |f| \leqslant \sqrt{\left(\int_0^1 1^2\right)\left(\int_0^1 |f|^2\right)} = |f|_2\,,$$

ce qui prouve que $\varphi_1$ est continue, de norme subordonnée $\leqslant 1$.

**d)** (cours). Supposons par l'absurde qu'il existe une constante $C$ telle que **pour tout** $f \in X$,

$$|\varphi_0(f)| \leqslant C\,|f|_2\,. \tag{1}$$

On choisit une suite de fonctions $f_n \in X$ ($n \geqslant 1$), à valeurs dans $[0,1]$, qui valent 1 en $x = \frac{1}{2}$ et qui valent 0 en dehors d'un intervalle de taille $1/n$ autour de $x = \frac{1}{2}$ (faire un dessin). Quand $n \to \infty$, $f_n(x)$ tend donc simplement vers 0 pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, donc par convergence dominée (ou par un calcul explicite), $|f_n|_2 \to 0$ quand $n \to 0$. En mettant $f_n$ dans (1), on obtient à la limite $1 \leqslant 0$, contradiction.

**e)** D'après le cours, le noyau d'une forme linéaire est fermé si et seulement si la forme linéaire est continue. Donc, par la question précédente, le noyau de $\varphi_0$ n'est pas fermé. Ce noyau est $\ker\varphi_0 = \{f \in X; f(\frac{1}{2}) = 0\}$.

**f)** On raisonne avec des suites. Soit $f_n$ une suite de $X$ qui tend vers une fonction $f \in X$, et telle que $f_n \in F_1$ pour tout $n$. On sait que $|f - f_n|_2 \to 0$, or

$$|f - f_n|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f - f_n|^2} \geqslant \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} |f - f_n|^2} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} |f|^2},$$

la dernière égalité venant du fait que $f_n \in F_1$. En passant à la limite on obtient $\sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} |f|^2} = 0$, ce qui implique que $f \in F_1$, car $f$ est continue. On a bien montré que $F_1$ est fermé dans $X$. L'argument pour $F_2$ est exactement analogue.

Clairement $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, donc la somme est bien directe.

**g)** Attention, la somme est directe mais ne fait pas tout l'espace $X$! En effet toute fonction de $F_1$, de $F_2$, et donc de $F_1 \oplus F_2$, vérifie $f(\frac{1}{2}) = 0$. En fait $F_1 \oplus F_2 = \ker\varphi_0$: on vient de montrer une inclusion, et réciproquement, si $f(\frac{1}{2}) = 0$, on peut toujours décomposer $f = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} f + (1 - \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}) f$, et on vérifie que le premier terme est dans $F_2$ et le deuxième dans $F_1$, CQFD. Donc, par la question e), $F_1 \oplus F_2$ n'est pas fermée.

**h)** Si on munit $X$ de la norme $|\cdot|_\infty$, $\varphi_0$ est clairemnent une forme linéaire "bornée" (au sens de la norme subordonnée) et donc continue. (cours).

**i)** L'intervalle $[0,1]$ est compact (pour la topologie habituelle). La suite $(x_n)$ admet donc une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, vers une certaine valeur d'adhérence $\ell$. En passant à la limite $k \to \infty$, par continuité de $f$ on obtient $f(x_{n_k}) \to f(\ell)$. D'autre part $n_k$ tend vers l'infini quand $k \to \infty$, donc $1/n_k \to 0$. Donc à la limite $k \to \infty$ dans l'inégalité large de l'énoncé appliquée à $x_{n_k}$, càd $|f(x_{n_k})| \leqslant 1/n_k$, on obtient $|f(\ell)| \leqslant 0$. Donc $f(\ell) = 0$.

Si $(x_n)$ est une suite qui énumère tous les rationnels de $[0,1]$, (remarque: une telle suite existe !), par densité de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ dans $\mathbb{R} \cap [0,1]$, on peut trouver une sous-suite qui converge vers un réel $x \in [0,1]$ arbitraire. Par le même argument que précédemment, on obtient $f(x) = 0$. Donc $f$ est la fonction nulle.