Université de Rennes 1 / ENS Rennes **TOPOLOGIE GÉNÉRALE**

QCM2 (30 minutes)

Nom : **Prénom :**

Pour chaque question cocher **toutes** les bonnes réponses.

Exercice 1 : *(Total 12 points, 3 points par question si les réponses cochées sont les bonnes réponses)*

1) Si E est un ensemble et τ_1, τ_2 sont deux topologies sur E alors
   - ◯ $\tau_1 \cup \tau_2$ est une topologie sur E
   - ◯ $\tau_1 \cap \tau_2$ est une topologie sur E
   - ◯ $\{\Omega_1 \times \Omega_2 \mid \Omega_1 \in \tau_1,\ \Omega_2 \in \tau_2\}$ est une topologie sur E^2
   - ◯ $\mathcal{P}(\tau_1) \cup \{\mathcal{P}(E)\}$ est une topologie sur $\mathcal{P}(E)$

2) Si τ est la topologie sur $\mathbb{C}$ engendrée par $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2^n\})_{n \in \mathbb{Z}}$ alors
   - ◯ τ est séparée
   - ◯ τ est moins fine que la topologie associée au module
   - ◯ τ est métrisable
   - ◯ τ est dénombrable

3) On munit $\mathbb{C}$ de la topologie associée au module. Si on pose $S = \{\frac{re^{i\log(r)}}{1+r} \mid r > 0\}$ et qu'on note ∂S sa frontière alors
   - ◯ $\partial S = \{0\}$
   - ◯ $\partial S = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
   - ◯ $\partial S = S$
   - ◯ $\partial S = S \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$

4) On note $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y\}$ et on munit $\mathbb{R}^2$ de la distance d définie par

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires,} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Si on note ∂V la frontière de V alors
   - ◯ $\partial V = \emptyset$
   - ◯ $\partial V = \{0\}$
   - ◯ $\partial V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = y\}$
   - ◯ $\partial V = V$.

Exercice 2 : *Total 8 points, bonne réponse 2 points, mauvaise réponse −1 point*

1) Soit (X, d) un espace métrique. Il existe une distance bornée engendrant la même topologie que d sur X.
   ◯ VRAI ◯ FAUX

2) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques homéomorphes. Si X est complet alors Y est complet.
   ◯ VRAI ◯ FAUX

3) Si (X, τ) est un espace topologique et A est une partie de X alors on a $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$.
   ◯ VRAI ◯ FAUX

4) Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une injection continue. Si Y est séparé alors X est séparé.
   ◯ VRAI ◯ FAUX