Université de Rennes 1 / ENS Rennes **TOPOLOGIE GÉNÉRALE**

Correction QCM2 (30 minutes)

Exercice 1 :

1) ◯ **NON.** Pas stable par unions : par exemple, $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2,3\}\}, \tau_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2,3\}\}$ mais $\{1\} \cup \{2\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

◯ **OUI,** cf cours.

◯ **NON.** Pas stable par unions : par exemle $E = \mathbb{R}$, $\tau_1 = \tau_2$ la topologie naturelle de $\mathbb{R}$, mais $]0,1[^2 \cup]1,2[^2 \notin \tau_1 \times \tau_2$.

◯ **OUI,** on peut facilement vérifier la définition.

2) On vérifie que $\tau = \{\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2^{-n}\},\ n \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}\}$.

◯ **NON,** il n'existe pas deux ouverts non vides disjoints.

◯ **OUI,** tous les ouverts de τ sont des ouverts pour la topologie naturelle.

◯ **NON,** car elle n'est pas séparée.

◯ **OUI,** car $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

3) On a $\partial S = S \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$. En effet, on a clairement $\mathring{S} = \emptyset$ donc $S \subset \overline{S} = \partial S$. Puisque $\mathbb{C}$ est normé donc métrique, on peut déterminer l'adhérence de S séquentiellement :

$$\lim_{r \to 0} \frac{re^{i \log r}}{1+r} = 0$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n e^{i \log r_n}}{1 + r_n} = e^{i\theta} \text{ où } r_n = e^{2\pi n + \theta}.$$

4) On a $\partial V = \{0\}$. En effet, on peut facilement vérifier que si $x \neq 0$ alors $\{\alpha \cdot (2x) \mid \alpha \in (0,1)\}$ est un ouvert contenant x. Ainsi $V \setminus \{0\}$ et $\complement_{\mathbb{C}} V$ sont ouverts. On a donc $\mathring{V} \subset V \setminus \{0\}$ et $\overline{V} = V$. Enfin, on voit que $0 \notin \mathring{V}$ car $0 \in \overline{\complement_{\mathbb{C}} V} = \complement_{\mathbb{C}}\left(\mathring{V}\right)$:

$$\lim_{n \to \infty} (2^{-n}, 0) = 0.$$

Exercice 2 :

1) **VRAI,** cf cours.

2) **FAUX.** On peut facilement montrer que la topologie engendrée par $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ sur $\mathbb{R}$ est la topologie naturelle. Donc l'identité est un homéomorphisme entre $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}, d)$. Cependant $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet car $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3) **VRAI.** On a $A \subset \overline{A}$. On en déduit donc que $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$ puis $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$. Ainsi, on a $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$.

4) **VRAI.** Soit x_1 et x_2 deux points distincts de X. Puisque f est injective, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Y étant séparé, il existe des ouverts de Y, notés Ω_1 et Ω_2, disjoints contenant respectivement $f(x_1)$ et $f(x_2)$. f étant continue $f^{-1}(\Omega_1)$ et $f^{-1}(\Omega_2)$ sont des ouverts disjoints de X contenant respectivement x_1 et x_2.