Université Rennes 1 & ENS Rennes	Licence 3 de mathématiques
Topologie	Contrôle du 05/10/2018

NOM : Prénom :

Durée : 30min.
Aucun support de lecture (notes de cours, livre, appareil électronique, etc.) n'est autorisé. Les réponses doivent être indiquées sur cette feuille (recto-verso). Pour les questions de type oui/non, une mauvaise case cochée pourra entraîner une diminution de la note (points négatifs), alors qu'aucune case cochée entraînera « seulement » un score nul.

1) Si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties.

(a) Soit X un ensemble à n éléments. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(X)$? ____________

(b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ est en bijection avec $\mathbb{R}$: ☐ oui ☐ non

2) Donner la définition d'une topologie sur un ensemble X :

____

____

____

____

3) Lesquelles sont des distances sur $\mathbb{R}$? (cochez les cases correspondantes)

(a) ☐ $d(x,y) = |\sin x - \sin y|$

(b) ☐ $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$

(c) ☐ $d(x,y) = (x-y)^2$

(d) ☐ $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \pi^2/6 & \text{si } x \neq y \end{cases}$

4) On munit $X = \mathbb{Q}$ de la distance *triviale* d_0 (qui n'est donc pas la distance usuelle !).

(a) Dans l'espace métrique (X, d_0), toute suite bornée est de Cauchy : ☐ oui ☐ non

(b) L'espace métrique (X, d_0) est complet : ☐ oui ☐ non

(c) Dans l'espace métrique (X, d_0), une application est contractante si et seulement si elle est constante : ☐ oui ☐ non

(d) Dans l'espace métrique (X, d_0), tout ouvert est un fermé : ☐ oui ☐ non

Tournez la page

5) Soit $X = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments. Donner toutes les topologies sur X. Lesquelles sont métrisables ? (On rappelle qu'une topologie est dite métrisable si elle peut être définie à l'aide d'une distance.)

6) On considère l'espace $X := C([-1,1];\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs réelles, qu'on munit de la norme $\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$. Soit d_1 la distance associée. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X, définie par

$$f_n(x) := \begin{cases} -n & \text{si } x = 0 \\ \max(-n, \ln|x|) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

est-elle de Cauchy dans (X, d_1) ? $\left\{ \begin{array}{l} \square \quad \text{oui} \\ \square \quad \text{non} \end{array} \right.$

7) Soit (X, d) un espace métrique complet, $A, B \subset X$ des parties de X telles que $A \subset B$. On suppose que A, muni de la distance induite par d, est complet. Alors B, muni de la distance induite par d, est également complet. $\left\{ \begin{array}{l} \square \quad \text{oui} \\ \square \quad \text{non} \end{array} \right.$

8) $\mathbb{Q}$ est muni de la métrique usuelle donnée par la valeur absolue. Soit $A = [1, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$. Cochez les assertions vraies :

(a) ☐ A est ouvert dans $\mathbb{Q}$

(b) ☐ A est fermé dans $\mathbb{Q}$.

(c) ☐ Si $B \subset A$ est fermé pour la topologie induite sur A, alors B est fermé dans $\mathbb{Q}$.

9) Dans une topologie induite par une distance, toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert : $\left\{ \begin{array}{l} \square \quad \text{oui} \\ \square \quad \text{non} \end{array} \right.$

10) Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ des espace métriques non vides, avec $n \geq 1$. On note X le produit cartésien

$$X := \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Construire une distance d sur X et, pour chaque $i = 1, \ldots, n$ une injection $J_i : X_i \to X$ isométrique, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \forall (x, y) \in X_i^2, \quad d(J_i(x), J_i(y)) = d_i(x, y).$$

–○– Fin –○–