Université de Rennes 1 et ENS Rennes

Mathématiques — L3 — Topologie Générale (TOPG) — Décembre 2018

Durée: 2h. Les documents ne sont pas autorisés.
Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans un ordre quelconque.
La rédaction et l'ordre logique des arguments devront être particulièrement soignés.

Exercice 1. *Questions de cours*

a) Définir un espace topologique.

b) Définir la compacité pour un espace topologique.

c) Montrer qu'une partie compacte K d'un espace topologique séparé X est fermée dans X.

d) Caractériser la compacité pour un espace métrique à l'aide des suites. *(Sans démonstration)*

e) En déduire une autre preuve de la question **c)** dans le cas où l'espace X est métrique.

f) Dans un espace topologique séparé, une partie compacte peut-elle être ouverte ? (justifier).

g) Définir la connexité d'un espace topologique.

h) Quels sont les espaces topologiques séparés connexes qui possèdent une partie compacte et ouverte non vide ? (justifier).

Exercice 2. *Questions de cours*

Soit X un ensemble et Y un espace métrique complet.

a) Qu'est-ce qu'une application bornée de X dans Y ?

b) Rappeler la définition de la *distance uniforme* d_∞ sur l'ensemble $\mathcal{F}_b(X,Y)$ des applications bornées de X dans Y.

c) Montrer que $(\mathcal{F}_b(X,Y), d_\infty)$ est un espace métrique complet.

d) Soient E, F des espaces vectoriels normés. Donner la caractérisation de la continuité d'une application linéaire $f : E \to F$.

e) Soit B la boule unité de E. Montrer que $\mathcal{L}_c(E,F)$, muni de la norme subordonnée, s'injecte de façon isométrique dans $(\mathcal{F}_b(B,F), d_\infty)$.

Tournez la page

Exercice 3. Soit (X, τ) un espace topologique compact non vide et sans point isolé, c'est à dire tel que pour tout $x \in X$, $\{x\} \notin \tau$.

a) Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés non vides de X et emboîtés, c'est à dire vérifiant $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout n entier, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.

b) Montrer la proposition suivante

$$\forall x \in X, \forall U \in \tau,\ U \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \exists V \in \tau,\ \emptyset \neq V \subset U \text{ et } x \notin \overline{V}.$$

c) Déduire des questions précédentes que X n'est pas dénombrable.

d) On suppose maintenant que X est un espace métrique complet (pas nécessairement compact). Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés non vides de X et emboîtés, et dont le diamètre tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.

Que peut-on en conclure ?

Exercice 4. *Toutes les réponses doivent être justifiées.*

On considère le plan complexe $\mathbb{C}$ muni de sa topologie usuelle induite par le module. On note $Y = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $U(1) = \{z \in \mathbb{C};\quad |z| = 1\}$, tous les deux munis de leur topologie induite. On pose également

$$X = U(1) \times]0, +\infty[\qquad \text{et} \qquad Z = U(1) \times [0, +\infty[,$$

tous deux munis de la topologie produit (les intervalles de $\mathbb{R}$ sont munis de leur topologie usuelle). On considère l'application $f : X \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(e^{i\theta}, \lambda) = \lambda e^{i\theta}\,,$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

a) Montrer que f induit un homéomorphisme $\check{f}$ de X dans Y.

b) Montrer que f s'étend de façon unique en une application continue $F : Z \to \mathbb{C}$.

c) On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Z donnée par $x_n = (e^{in}, \frac{1}{n+1})$. Déterminer l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

d) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $y_n = f(x_n)$ dans $\mathbb{C}$.

e) $F : Z \to \mathbb{C}$ est-il un homéomorphisme ?

f) On note $\mathcal{T}_Z$ la topologie de Z. On note $\tilde{Z}$ l'ensemble Z muni de la topologie $F^*(\mathcal{T}_\mathbb{C})$, où $\mathcal{T}_\mathbb{C}$ désigne la topologie usuelle de $\mathbb{C}$. On rappelle que $F^*(\mathcal{T}_\mathbb{C})$ est la topologie la moins fine rendant F continue. Montrer que $F^*(\mathcal{T}_\mathbb{C}) \subset \mathcal{T}_Z$.

g) L'espace $\tilde{Z}$ est-il séparé ?

h) La suite (x_n) converge-t-elle dans $\tilde{Z}$?

(fin de l'énoncé)