Correction du contrôle continu (1 heure)

Exercice 1 : Si Ω est vide, le résultat est clair. On considère donc $x \in \Omega$ et on note ω l'ensemble des points y de Ω tels qu'il existe un chemin continu inclus dans Ω reliant x à y. Pour montrer que Ω est connexe par arcs, il suffit de montrer que $\Omega = \omega$. Puisque Ω est connexe, il nous suffit de prouver que ω est une partie ouverte, fermée est non vide relativement à Ω.

— *ω est non vide.* En effet, on a $x \in \omega$.

— *ω est ouvert.* Soit $y \in \omega$ et γ un chemin le reliant à x dans Ω. Puisque Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset \Omega$. Pour montrer que ω est ouvert, il suffit de montrer que $B(y, r) \subset \omega$. En effet, si $z \in B(y, r)$ alors le chemin obtenu en suivant γ puis le segment $[y, z]$ relie x à z tout en restant dans Ω (car $B(y, r)$ est convexe) et est continu. On a donc bien $z \in \omega$.

— *ω est fermé relativement à Ω.* Puisque Ω est un espace métrique, il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle des fermés. On considère donc une suite y_n de points de ω convergeant vers une limite y dans Ω. On veut montrer que $y \in \omega$.
Puisque $y \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset \Omega$. La suite (y_n) convergeant vers y, il existe un indice n_0 tel que $y_{n_0} \in B(y, r)$. Mais alors, comme précédement, en parcourant un chemin continu reliant x à y_{n_0} dans Ω puis le segment $[y_{n_0}, y]$, on défini un chemin continu restant dans Ω et reliant x à y. Ainsi, on a bien $y \in \omega$.

Exercice 2 :

1) Supposons par l'absurde que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Alors puisque X est compact et que les F_n sont fermés, il existe $n_1 \leq \cdots \leq n_N \in \mathbb{N}$ tels que $\bigcap\limits_{j=1}^{N} F_{n_j} = \emptyset$. Mais alors puisque les F_n sont emboités, on aurait
$$F_{n_N} = \bigcap_{j=1}^{N} F_{n_j} = \emptyset,$$
ce qui serait contradictoire car F_N est supposé non vide.

2) Puisque X ne contient pas de points isolés et que U est ouvert, on a $U \neq \{x\}$. Donc il existe $y \in U$ tel que $y \neq x$. Or X est séparé car compact, donc il existe $W_x, W_y \in \tau$ tels que
$$W_x \cap W_y = \emptyset \text{ et } x \in W_x \text{ et } y \in W_y.$$
Mais alors en posant $V = W_y \cap U$, on a bien par construction $x \notin \overline{V}$ et $y \in V \subset U$.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de X. Montrons qu'il existe $y \in X$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $y \neq x_n$.
On construit par récurrence une suite décroissance d'ouverts non vides V_m tels que pour tout $n < m$ on ait $x_n \notin \overline{V_m}$. On pose $V_0 = X$ puis on suppose que l'on a construit la suite jusqu'au rang m. On applique alors 2) avec $x = x_m$ et $U = V_m$. On obtient alors un ouvert non vides V tel que $x_m \notin \overline{V}$ et $V \subset V_m$. $V_{m+1} = V$ vérifie donc bien la propriété au rang $m + 1$.
Par construction, la famille $(\overline{V_m})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de partie fermées et non vides d'un espace compact X. D'après 1), son intersection contient donc au moins un point noté y. Mais, toujours par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n n'appartient pas à cette intersection. Il est donc différent de y.