Université Rennes 1 & ENS Rennes	Licence 3 de mathématiques
Topologie	Contrôle du 29/09/2017

NOM : Prénom :

Durée : 30min.
Aucun support de lecture (notes de cours, livre, appareil electronique, etc.) n'est autorisé. Les réponses doivent être indiquées sur cette feuille (recto-verso). Le barème est indiqué entre crochets [ ]; par exemple, les questions de type oui/non apportent 1 point pour une réponse juste, retirent 0.5 point pour une réponse fausse (et 0 point si aucune réponse n'est cochée). Les questions 4,5 et 6 rapportent 2 points si elle sont entièrement justes, 1 point pour une seule erreur, 0 sinon.

1) *[1 ;-0,5]* Tout ensemble non vide admet une topologie : ☐ oui ☐ non

2) *[1 ;-0,5]* Tout ensemble non vide peut être muni d'une structure d'espace métrique : ☐ oui ☐ non

3) *[1 ;-0,5]* Dans un espace topologique, une réunion dénombrable d'ensembles fermés est fermée : ☐ oui ☐ non

4) *[2 ;1]* Lorsqu'elle existe, indiquer la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants :

(a) $A := \{\frac{1}{n}; \quad n \in \mathbb{Z}^*\}$. $\sup A =$ ____________

(b) $B := \{-\frac{1}{n}; \quad n \in \mathbb{Z}^*\}$. $\sup B =$ ____________

(c) $C := \{-\frac{1}{x}; \quad x \in \mathbb{R}^*\}$. $\sup C =$ ____________

5) *[2 ;1]* Soit X un ensemble à trois éléments : $X = \{a; b; c\}$. Lesquelles des parties de $\mathcal{P}(X)$ définissent une topologie sur X ? (cocher les cases correspondantes)

(a) ☐ $\{\varnothing; X; \{a\}; \{b; c\}\}$

(b) ☐ $\{\varnothing; X; \{a; b\}; \{b; c\}\}$

(c) ☐ $\{\varnothing; X; \{a; b\}\}$

(d) ☐ $\mathcal{P}(X)$

6) *[2 ;1]* Avec les mêmes données que l'exercice précédent, parmi les topologies, lesquelles sont métrisables ?

(a) ☐

(b) ☐

(c) ☐

(d) ☐

Tournez la page

7) *[2]* Donner la définition d'une distance sur un ensemble X :

8) Dans un espace métrique (X, d) :

(a) *[1]* Donner la définition de l'assertion « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X »

(b) *[2 ;1]* Cocher les assertions vraies :

- ☐ Toute suite de Cauchy est bornée
- ☐ Toute suite de Cauchy est convergente
- ☐ Toute suite convergente est de Cauchy

9) Soit $I = [\frac{1}{2}, 2] \subset \mathbb{R}$, muni de la métrique induite.

(a) *[1 ;-0,5]* I est-il un espace métrique complet ? ☐ oui ☐ non

(b) *[1]* Pour $x \in I$, on pose $f(x) := \frac{1}{x}$. Montrer que f envoie I dans lui-même.

(c) *[1 ;-0,5]* La fonction $f : I \to I$ définie ci-dessus admet-elle un point fixe ? ☐ oui ☐ non

(d) *[2]* f est-elle contractante ? (le démontrer)

10) *[1]* Soit $A := \{\sin(\frac{1}{n}); \quad n \in \mathbb{Z}^*\} \subset \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie habituelle. Déterminer l'intérieur de A . $\mathring{A} =$ __________

–○– Fin –○–