Université de Rennes 1 et ENS Rennes

Mathématiques — L3 — Topologie Générale (TOPG) — Décembre 2017

Durée: 2h. Les documents ne sont pas autorisés.
Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans un ordre quelconque.
La rédaction et l'ordre logique des arguments devront être particulièrement soignés.

Exercice 1. *Questions de cours. Aucune démonstration n'est demandée, sauf pour la question f).*

a) Définir un espace topologique.

b) Définir la compacité pour un espace topologique.

c) Caractériser la continuité d'une application entre deux espaces métriques à l'aide des suites.

d) Caractériser les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

e) Définir la complétude pour un espace métrique.

f) Dans $X = \mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par la topologie standard de $\mathbb{R}$, l'ensemble

$$A = \left\{ x \in X; \quad \sqrt{2} < x < \sqrt{3} \right\}$$

est-il ouvert ? fermé ? compact ? connexe ? On justifiera soigneusement les réponses.

Exercice 2. Soit X un ensemble à trois éléments: $X = \{a; b; c\}$.

a) Lesquelles des parties de $\mathcal{P}(X)$ définissent une topologie sur X ? Justifier soigneusement.

(A) $\{\varnothing; X; \{a\}; \{b; c\}\}$

(B) $\{\varnothing; X; \{a; b\}; \{b; c\}\}$

(C) $\{\varnothing; X; \{a; b\}\}$

(D) $\mathcal{P}(X)$

b) Parmi les topologies précédentes, lesquelles sont métrisables ? Justifier soigneusement.

c) Pour chacune des topologies précédentes, quelles sont les parties de X qui sont connexes ?

Exercice 3. *La question a) n'est pas nécessaire à la résolution des questions suivantes b) c) et d).*
Soit (E, τ) un espace topologique séparé. Soient K_1 et K_2 deux parties compactes de E disjointes.

a) Montrer qu'il existe des ouverts Ω_1 et Ω_2 disjoints tels que $K_1 \subset \Omega_1$ et $K_2 \subset \Omega_2$.

b) On suppose dans toute la suite que la topologie τ est donnée par une distance d sur E. Montrer que $d(K_1, K_2) > 0$.

c) Soit $A \subset E$ une partie quelconque et $\epsilon > 0$. Montrer que $\bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon)$ est un voisinage ouvert de A.

d) En déduire une nouvelle preuve du résultat du *a*) (dans le cas métrisable).

Exercice 4. *Les questions a) b) et c) sont en grande partie indépendantes.*

a) Soit X un ensemble et τ_1, τ_2 des topologies métrisables sur X. Montrer que l'identité $(X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ est continue si et seulement si les applications continues de (X, τ_2) vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont des applications continues de (X, τ_1) vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

b) On considère $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit τ_1 la topologie sur X induite par la norme L^1, et τ_2 celle induite par la norme L^∞. Montrer que l'application $\varphi : X \to (\mathbb{R}, |\cdot|) : f \mapsto f(0)$ est continue pour τ_2 mais pas pour τ_1. Conclure. Comment transcrire le résultat en termes de comparaison de normes ?

c) Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour $f \in E$, on définit les quantités

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + x f'(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

i) Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ définissent des normes sur E. Vérifier que $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$.

ii) Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que la fonction $f(x) = \int_0^1 g(xt)dt$ est l'unique solution dans E de l'équation différentielle suivante

$$y(x) + x\, y'(x) = g(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

iii) En déduire que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 alors

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \|f\|_1 \qquad (\star)$$

iv) Montrer que l'inégalité $(\star)$ reste vraie pour $f \in E$.

Indication: on pourra admettre la densité de C^2 dans C^1 muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

v) Montrer que les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Indication: on pourra utiliser la suite de fonctions $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x}$.

vi) Trouver une forme linéaire sur E qui est continue pour $\|\cdot\|_2$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

vii) Trouver un sous-espace vectoriel $H \subset E$ qui est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais pas pour $\|\cdot\|_2$.

(fin de l'énoncé)