Université de Rennes 1 **TOPOLOGIE GÉNÉRALE**

Contrôle continu 1 (1 heure)

Exercice 1 : *(2 points)*
Soit $A \subset \mathbb{Q}$ une partie connexe de $\mathbb{Q}$. La topologie dont est ici muni $\mathbb{Q}$ étant la trace de la topologie induite par $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolu), A est aussi une partie connexe de $\mathbb{R}$. D'après le cours A est donc un intervalle. Or $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, il ne contient d'autres intervalles que les singletons et l'ensemble vide. A est donc l'un d'eux. Ces derniers étant connexes, ils sont toutes les parties connexes de $\mathbb{Q}$. Puisque d'après le cours, les composantes connexes sont des parties connexes, $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu (i.e. ses composantes connexes sont les singletons).

Exercice 2 : *(6 points)* Supposons E compact. Puisque E est recouvert par l'ensemble des boules ouvertes de rayon ε, on déduit du critère de Borel Lebesgue que seul un nombre fini d'entre elles suffit à recouvrir E. E est donc précompact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Puisque E est métrique compact, il existe une extractrice (n_j) telle que (x_{n_j}) converge vers une limite $x \in E$. Montrons que (x_n) converge vers x.
Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tels que

$$\forall m \geq n \geq n_0,\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Alors, par prolongement des inégalités,

$$\forall n \geq n_0,\ d(x_n, x) = \lim_{j\to\infty} d(x_n, x_{n_j}) \leq \varepsilon.$$

Donc (x_n) converge vers x. E est donc complet.

Réciproquement, supposons que E est précompact et complet. Prenons une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et extrayons-en une sous suite convergente. Remarquons tout d'abord que puisque E est précompact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boule de rayon ε contenant une infinité de terme de la suite. Ainsi, on peut construire par récurrence une sous suite de $(x_n)_n$, notée $(x_{n_k})_k$ telle que pour tout k, il existe $y_k \in E$ tel que pour tout $\ell \geq k$, $x_{n_l} \in B(y_k, 2^{-k})$. Cette sous suite est de Cauchy car si $\ell \geq k$ alors $d(x_{n_\ell}, x_{n_k}) \leq 2^{1-k}$. E étant complet, elle converge.

Exercice 3 : *(4 points)* Montrons que $\Omega = \{x \in E,\ f(x) = f(0)\}$ est ouvert et fermé.
Soit $x \in \Omega$. Puisque f est localement constante, il existe $r > 0$ telle que la boule de centre x et de rayon r soit incluse dans Ω. Ω est donc ouvert. De même si $x \notin \Omega$ alors sur une boule de centre x et de rayon $r > 0$, $f(y) = f(x) \neq f(0)$. La boule de centre x et de rayon r est donc incluse dans le complémentaire de Ω. Ce dernier est donc ouvert. Ainsi Ω est fermé.
E étant un espace vectoriel, il est connexe par arc affines. Il est a fortiori connexe. Ω en étant une partie non vide ($0 \in \Omega$) ouverte et fermée, elle est pleine : $\Omega = E$.

Exercice 4 : *(4 points)* Soit $x \in K_1$. Puisque E est séparé, pour tout $y \in K_2$ il existe des ouverts $x \in O_{1,y}$ et $y \in O_{2,y}$ disjoints. Mais alors K_2 est recouvert par les $O_{2,y}$. On peut donc en extraire un sous recouvrement fini, $O_{2,y_1}, \ldots, O_{2,y_n}$. On pose alors

$$V_{1,x} = \bigcap_{i=1}^{n} O_{1,y_i} \text{ et } V_{2,x} = \bigcup_{i=1}^{n} O_{2,y_i}.$$

Par construction, ce sont des ouverts disjoints contenant respectivement x et K_2. Maintenant, on observe que les $V_{1,x}$ recouvrent K_1. On peut donc en extraire un sous recouvrement fini,

$V_{1,x_1}, \ldots, V_{1,y_m}$. On pose alors

$$\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^{m} V_{1,x_i} \text{ et } \Omega_2 = \bigcap_{i=1}^{m} V_{2,x_i}.$$

Par construction, Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts disjoints et contiennent respectivement K_1 et K_2.

Exercice 5 : *(4 points)* Puisque ψ et $s \mapsto M_s$ sont bijectives, Φ est bijective. Montrons que Φ est continue. Puisque $\mathbb{U}$ est un espace métrique, il suffit de montrer qu'elle est séquentiellement continue.

On se donne une suite $z_n \in \mathbb{U}$ convergeant vers $z \in \mathbb{U}$. Si $z \neq -1$ alors à partir d'un certains rang $z_n \neq -1$. Il suffit donc de vérifier que $M_{\psi(z_n)}$ converge simplement vers $M_{\psi(z)}$. Ceci est une conséquence immédiate de la continuité de l'exponentielle et de ψ.
Si $z = -1$, on peut supposer quitte à extraire que $z_n \neq -1$ pour tout n. Mais alors $|\psi(z_n)|$ tend vers $+\infty$. C'est pourquoi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M_{\psi(z_n)}(x) = M_x(\psi(z_n))$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Autrement dit $M_{\psi(z_n)}$ converge simplement vers N.

De plus, puisque Φ est continue et que $\mathbb{U}$ est compacte, elle est fermée. Sa réciproque est donc continue. Φ est donc un homéomorphisme.