Université de Rennes 1 / ENS Rennes **TOPOLOGIE GÉNÉRALE**

Contrôle continu (1 heure)

Nom : **Prénom :**

Exercice 1 : *(3 points)* On munit $\mathbb{Q}$ de la topologie induite par la valeur absolue. Déterminer les parties connexes de $\mathbb{Q}$. En déduire les composantes connexes de $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ muni de la topologie produit induite par la valeur absolue sur chacun des facteurs.

Exercice 2 : *(6 points)* Soit (E, d) un espace métrique. Soit $A \subset E$. On dit que A est précompacte si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boule de rayon ε. Montrer que A est précompacte si et seulement si toute suite de A admet une sous-suite de Cauchy. On suppose E complet. Montrer que A est précompacte si et seulement si $\overline{A}$ est compacte.

Exercice 3 : *(4 points)* Soit (E, τ) un espace topologique. On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est localement constante si tout point de E admet un voisinage sur lequel f est constante. Montrer que E est connexe si et seulement si toute fonction localement constante est constante.

Exercice 4 : *(4 points)* Soit (E, d) un espace métrique. Si K_1 et K_2 sont deux parties de E, on note $d(K_1, K_2) := \inf_{(x,y)\in K_1\times K_2} d(x, y)$. On suppose que K_1 et K_2 sont compactes et disjointes. Montrer que $d(K_1, K_2) > 0$. En déduire qu'il existe des ouverts Ω_1 et Ω_2 disjoints tels que $K_1 \subset \Omega_1$ et $K_2 \subset \Omega_2$.

Exercice 5 : *(4 points)* On munit toute partie de $\mathbb{C}$ de la topologie induite par le module. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On rappelle que l'application suivante est un homéomorphisme (*on pourra utiliser ce résultat sans démonstration*)

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{U} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ a+ib & \mapsto & \frac{b}{a+1}. \end{cases}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $M_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ M_s(x) = e^{-(x-s)^2}.$$

On note $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On considère alors $\mathcal{M} = \{M_s \mid s \in \mathbb{R}\} \cup \{N\}$ comme un sous espace topologique de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Montrer que l'application suivante est un homéomorphisme :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{U} & \to & \mathcal{M} & \\ z & \mapsto & M_{\psi(z)} & \text{si } z \neq -1, \\ -1 & \mapsto & N & \text{sinon.} \end{cases}$$