

24h de théorie spectrale

M2 Mathématiques fondamentales, Rennes 1

San Vũ Ngọc



Voici 24h de théorie spectrale, dans son jus (pur sucre), telle qu'enseignée par l'auteur à l'université de Rennes 1 en septembre-octobre 2020. Le rythme de 4h par semaine, en deux séances de 2h par semaine, est certes soutenu, mais rien ne vous empêche de faire ça en un seul jour...



Copyright © 2020–2021 San Vĩ Ngoc

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

[HTTPS ://PERSO.UNIV-RENNES1.FR/SAN.VU-NGOC/](https://perso.univ-rennes1.fr/san.vu-ngoc/)

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

Version du 6 septembre 2021

Table des matières

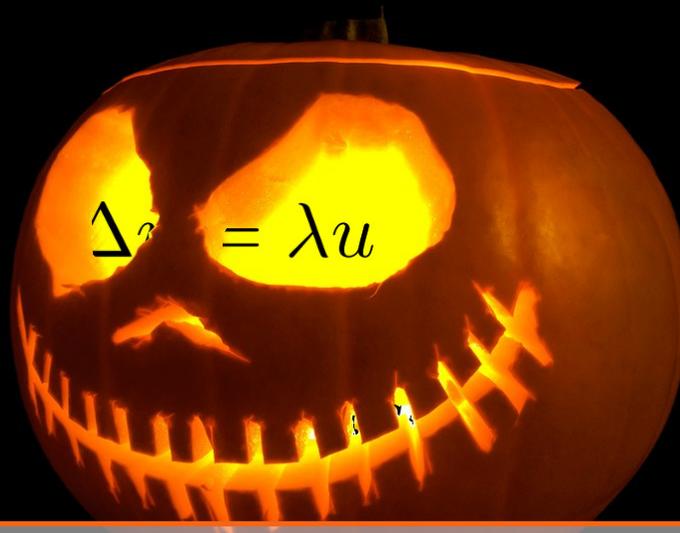
	Avant-propos	5
1	Introduction	7
1.1	Spectrale ?	7
1.2	Introduction de l'enseignant et ses motivations	7
1.3	Autres motivations rapides	8
1.4	Comment suivre ce cours	8
2	Opérateurs non bornés.	9
2.1	Rappel sur les applications linéaires continues	9
2.2	Motivation	10
2.3	Définition	10
2.4	Graphes, norme du graphe	10
2.5	Extensions	11
2.6	Opérateurs fermés, fermables	11
2.7	Opérateurs symétriques	12
2.8	Adjoint, opérateur auto-adjoint	12
2.9	Interprétation symplectique	13
2.10	Spectre d'un opérateur non borné	15
3	Théorèmes de Lax-Milgram	17
3.1	Le cas borné	17

3.2	Le cas non borné	18
3.3	Le cas hermitien	19
3.4	Extension de Friedrichs	20
4	Rappels sur les opérateurs compacts	23
4.1	Opérateurs compacts	23
4.2	Injections de Sobolev etc.	24
4.3	Spectre d'un opérateur compact – début	25
5	Théorie de Fredholm	27
5.1	Opérateurs de Fredholm	27
5.2	Problèmes de Grushin	28
5.3	Théorie de Fredholm analytique	32
5.4	Spectre d'un opérateur compact – suite	37
6	Spectre et Résolvante	39
6.1	Définitions	39
6.2	Identités de la résolvante	40
6.3	Sous-espaces caractéristiques, spectre discret	41
6.4	Commutation avec un opérateur borné	41
6.5	Projecteurs spectraux (de Riesz)	42
6.6	Opérateurs à résolvante compacte	46
7	Opérateurs auto-adjoints	47
7.1	Extensions auto-adjointes	47
7.2	Spectre des opérateurs auto-adjoints	51
7.3	Quotients de Rayleigh	54
7.4	Théorème spectral	55
	Bibliographie	61

Avant-propos

Il faut être honnête, ces notes de cours ne prétendent à aucune originalité dans leur contenu. On trouve sur internet de très bons cours de théorie spectrale (y compris en français) qui sont souvent bien plus complets. Seuls le choix des sujets abordés (avec la contrainte des 24 heures), et l'enchaînement des arguments, pourront témoigner d'une réflexion personnelle de l'auteur. D'une part, le choix délibéré de ne pas accorder une place prépondérante aux opérateurs auto-adjoints reflète un mouvement de fond dans la recherche mathématique actuelle. D'autre part, et en conséquence, puisqu'il faut malgré tout obtenir l'incontournable théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints non bornés (version calcul fonctionnel), il a fallu trouver un chemin raisonnablement court. L'idée a été de se baser sur le rayon spectral pour obtenir la norme de la résolvante, ce qui permet d'en déduire le calcul fonctionnel de façon élémentaire.





1. Introduction

1.1 Spectrale ?

Ce cours est une introduction à la théorie spectrale des opérateurs qu'on appellera « non bornés ». Sous cette appellation fantomatique se cache simplement l'étude des opérateurs linéaires en dimension infinie. Évidemment, ça sert à plein de choses, et évidemment aussi, je vais essayer de vous motiver ça de mon point de vue personnel...

1.2 Introduction de l'enseignant et ses motivations

Voir ma page web : <https://perso.univ-rennes1.fr/san.vu-ngoc/>

Présentation de mes thèmes de recherche. Géométrie symplectique / analyse microlocale / théorie spectrale.

Liens avec la physique : mécanique classique/mécanique quantique.

Mécanique classique et géométrie symplectique.

Espace des phases M . Observable. Champ hamiltonien sur \mathbb{R}^{2n} . Cas symplectique général. Changements de var (transformations canoniques). Exemple : Lemme de Morse symplectique en 1D. Théorème ; les flots hamiltoniens sont des transformations canoniques.

Mécanique quantique et théorie spectrale.

Espace des états quantiques : espace L^2 , énergie, donc Hilbert. Observables quantiques. Interprétation probabiliste, opérateur position. formule $\langle Au, u \rangle$. Auto-adjoint. Spectre, min-max. Analogie des transformations canoniques : opérateurs unitaires.

Propagation Schrödinger. Flot unitaire.

Limite semi-classique et analyse microlocale.

Liens mathématiques rigoureux entre les deux. Cf cours d'Analyse Microlocale.
Observables quantiques : opérateurs pseudo-différentiels.

Exemple de problème qui m'intéresse : la théorie spectrale inverse pour un Hamiltonien quantique. Par exemple le Laplacien sur un domaine (cf aussi le cours EDP Elliptique)

La référence principale de ce cours est le livre [2] Christophe Chevy et Nicolas Raymond. Même si on s'autorisera quelques divergences, le lecteur est fortement invité à s'y référer régulièrement.

1.3 Autres motivations rapides

- systèmes dynamiques – équations d'évolution près d'un point fixe
- solutions stationnaires d'EDP linéaires : chaleur (diffusion, covid), ondes (instruments de musique), Schrödinger (mécanique quantique)...

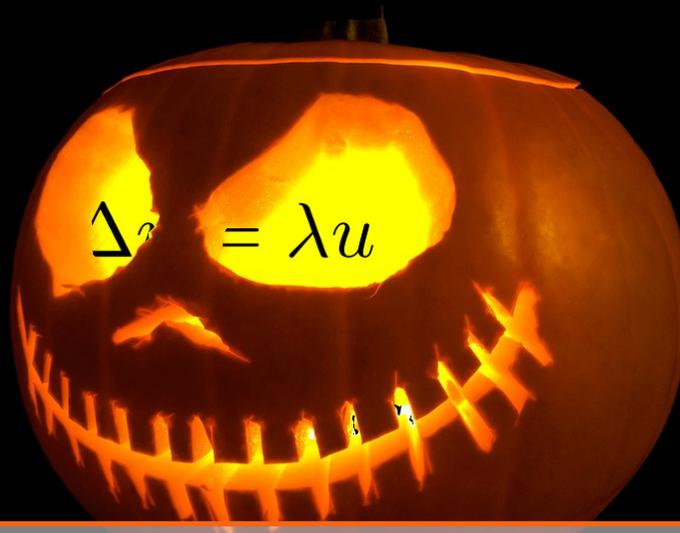
1.4 Comment suivre ce cours

Je ne crois pas aux vertus prétendument bénéfiques de l'« effet de surprise » pour des cours de mathématiques avancées. Au contraire, sauf si vous connaissez déjà toutes les notions sur le bout des doigts, il est souvent plus profitable (et, par là même, plus agréable!) d'avoir (un peu) lu à l'avance ce dont le prof va parler en cours. Ce texte peut servir à ça!

Attention, ce « livre » ne contient pas forcément tous les détails qui seront expliqués en cours, mais devrait être suffisant pour vous permettre de vous concentrer sur les explications orales, *et de poser des questions*, quitte compléter vos notes par la suite.

Faute de temps, trop peu d'exemples pourront être détaillés pendant le cours. Il vous appartient de vous familiariser avec la théorie en faisant des exercices que vous pouvez trouver par exemple dans le livre [2].





2. Opérateurs non bornés.

2.1 Rappel sur les applications linéaires continues

Révisons préalables : analyse fonctionnelle, cf Appendice A dans [2].

Espaces de Banach, applications linéaires continues (opérateurs bornés) : par les ouverts, par les boules en 0, par la norme.

Théorème 2.1 — Application ouverte. A continue surjective \Rightarrow ouverte.

Démonstration. exo □

Corollaire 2.2 — Graphe fermé. E, F Banach, $A : E \rightarrow F$ continue $\iff G_A$ est fermé pour la topologie produit.

Démonstration.

- si $f : X \rightarrow Y$ est continue et Y est un espace topologique séparé, alors le graphe de f est fermé. (exo)
- Si G_A est fermé alors c'est un Banach, et la projection sur le premier facteur est surjective continue (par la norme). On montre alors que pour tout ouvert V de F voisinage de 0, $A^{-1}(V)$ contient un ouvert $U \subset E$ voisinage de 0. En effet $(E \times V) \cap G_A$ est un ouvert de G_A . Sa projection U sur le premier facteur convient. □

Corollaire 2.3 — Théorème de Banach. E, F Banach, $A : E \rightarrow F$ bijective et continue, alors A^{-1} est continue. (on dit que A est **inversible**)

Démonstration. A est ouverte donc A^{-1} est continue. □

Proposition 2.4 E, F Banach, $A : E \rightarrow F$ continue. Alors A est injective d'image

fermée \iff

$$\exists C, \quad \|u\| \leq C \|Au\|, \quad \forall u \in E.$$

Démonstration.

- Si A est injective, alors $\tilde{A} : E \rightarrow f(A)$ est bijective, et ce dernier est un Banach car fermé, donc inversible : il suffit alors d'écrire l'inégalité de la continuité de l'inverse.
- Si on a l'inégalité, on prend une suite de l'image Au_n qui converge vers $y \in F$. Alors elle est de Cauchy et par l'inégalité, u_n est de Cauchy, donc converge. Par continuité de A on conclut que y est dans l'image. □

R Si on a une bijection linéaire bicontinue entre deux EVN E, F (on dit « isomorphisme »), alors E Banach $\iff F$ Banach.

2.2 Motivation

Discussion sur le Laplacien sur \mathbb{R}^n , comment le définir ? Espaces C^∞ (pas Banach ! Fréchet au mieux). Rappel sur les Distributions, \mathcal{D}' , \mathcal{S}' . Injection (continue) de L^2 dans ces espaces. Nécessité du domaine. espace H^2 .

2.3 Définition

On suit la convention de [2] : on se donne deux Banach E, F et le domaine n'est pas nécessairement dense dans E .

Définition 2.5 ($A, \text{Dom}(A)$)

Attention on s'autorise parfois à dire A au lieu de $(A, \text{Dom}(A))$ lorsqu'il n'y a pas de doute sur le domaine.

Question : exemple d'opérateur avec domaine E mais non continu. On peut le faire avec une base algébrique, et définir $Ae_n = e_n$, mais exemple plus intéressant ??

■ **Exemple 2.6** Laplacien, opérateurs différentiels, domaine C_0^∞ . Discussion rapide sur la quantification, commutateur $[\partial_x, x] = 1$. Les opérateurs diff à coefficients C^∞ sont continus de $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$. ■

2.4 Graphes, norme du graphe

Définition 2.7 Graphe $G_A \subset E \times F$, muni de la topologie produit.

Bien sûr, G_A détermine entièrement $(A, \text{Dom}(A))$. On retrouve le domaine en projetant sur E .

Lemme 2.8 CNS pour qu'un sev $G \subset E \times F$ soit un graphe :

$$(0, v) \in G \iff v = 0$$

Corollaire 2.9 Un sev d'un graphe est encore un graphe. (ce sera celui de la restriction à un sous-espace, cf ci-dessous « Extensions »).

On a une bijection $\text{Dom}(A) \rightarrow G_A$, $j(u) = (u, Au)$. On norme le produit $E \times F$ par la norme somme, et on prend le pull-back (image réciproque) de cette norme :

$$\|u\|_A := \|u\| + \|Au\|$$

Proposition 2.10 (définition) La norme $\|\cdot\|_A$ est appelée la norme du graphe, et j est une isométrie de $(\text{Dom}(A), \|\cdot\|_A)$ sur G_A .

2.5 Extensions

Définition 2.11 $(B, \text{Dom}(B))$ est une **extension** de $(A, \text{Dom}(A))$ (noté $A \subset B$) si $\text{Dom}(A) \subset \text{Dom}(B)$ et $B|_{\text{Dom}(A)} \equiv A$.

Lemme 2.12 $A \subset B \iff G_A \subset G_B$

Démonstration. évident □

2.6 Opérateurs fermés, fermables

Quelle est la bonne notion de continuité? Rappel : (exo) si $f : X \rightarrow Y$ est continue et Y un espace topologique séparé, alors le graphe de f est fermé. Dans le cas d'EVN, et d'application linéaire, on a la réciproque (Théorème du Graphe Fermé).

Définition 2.13 On dit que $(A, \text{Dom}(A))$ est **fermé** si G_A est fermé dans $E \times F$

Donc si $\text{Dom}(A) = E$, fermé équivaut à continu (*i.e.* borné) (théorème du graphe fermé). Mais c'est le seul cas! car :

Lemme 2.14 Si $(A, \text{Dom}(A))$ est fermé et $\text{Dom}(A)$ est dense dans E , alors A est continu ssi $\text{Dom}(A) = E$.

Démonstration. Sens réciproque : théorème du graphe fermé. Sens direct : j_A est alors continue avec les normes habituelles, donc on peut l'étendre continûment à E entier. Donc puisque G_A est fermé, son image réciproque $\text{Dom}(A)$ aussi...

Remarque : on peut directement le faire par des suites de Cauchy de $\text{Dom}(A)$, c'est plus rapide. □

Définition 2.15 Opérateur **fermable** : admet une extension fermée. Dans ce cas $\overline{G_A}$ est un sev du graphe de l'extension, donc c'est un graphe, l'application correspondante \overline{A} est la **fermeture** de A . C'est bien sûr la plus petite extension fermée de A .

Proposition 2.16 On a les équivalences :

1. $(A, \text{Dom}(A))$ est fermé
2. $(\text{Dom}(A), \|\cdot\|_A)$ est un Banach
3. Caractérisation séquentielle : si $u_n \in \text{Dom}(A)$ converge vers u **ET** Au_n converge vers v dans F , alors $u \in \text{Dom}(A)$ et $Au = v$.

Démonstration. 2 : voir prop 2.10.

3 caractérisation séquentielle de G_A fermé. \square

Attention! Erreurs courantes : Un opérateur fermé n'a pas forcément un domaine fermé, ni une image fermée!

Exercice 2.17 Exercice 2.21 dans [2] : $T\varphi = \varphi(0)$ non fermable. \blacksquare

Exercice 2.18 [2, Prop 2.14]. \blacksquare

Exercice 2.19 Si $A : \text{Dom}(A) \rightarrow F$ est fermé est bijectif, alors son inverse $A^{-1} : F \rightarrow \text{Dom}(A) \subset E$ est continu. \blacksquare

2.7 Opérateurs symétriques

Ici $E = F = \mathcal{H}$ un espace de Hilbert. (Tous les espaces de Hilbert considérés dans ce cours sont sur \mathbb{C} .)

Définition 2.20 $(A, \text{Dom}(A))$ est **symétrique** si

$$\forall u, v \in \text{Dom}(A), \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$$

■ **Exemple 2.21** Opérateurs différentiels “formellement symétriques” : polynômes en $i\partial$ à coefficients **constants, réels**, sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec domaine C_0^∞ . Cas variété compacte avec densité, $L^2(X, dx)$. Cas non constant plus délicat : cf quantif à gauche/droite/Weyl. Voir cours d'Analyse Microlocale. \blacksquare

Exercice 2.22 Si A admet une extension symétrique, alors il est symétrique. \blacksquare

Démonstration. évident \square

Exercice 2.23 A est symétrique ssi $\forall u \in \text{Dom}(A), \langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$ \blacksquare

Démonstration. [2, Prop 2.56]. Voir aussi plus loin le lemme 7.4. \square

2.8 Adjoint, opérateur auto-adjoint

$$E = F = \mathcal{H}$$

On cherche à définir un opérateur A^* tel que

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle, \quad \forall u \in \text{Dom}(A), \forall v \in \text{Dom}(A^*). \quad (2.1)$$

Condition nécessaire : pour tout v dans le domaine de A^* , l'application $u \mapsto \langle Au, v \rangle$ doit être continue. Du coup :

Proposition 2.24 — Définition. Si $\text{Dom}(A)$ est dense, on peut définir **adjoint** $(A^*, \text{Dom}(A^*))$ qui vérifie (2.1), de façon unique, avec

$$\text{Dom}(A^*) = \{v \in \mathcal{H}; \quad \text{Dom}(A) \ni u \mapsto \langle Au, v \rangle \text{ se prolonge de façon continue à } \mathcal{H}\}$$

Démonstration. Pour tout $v \in \text{Dom}(A^*)$, le théorème de Riesz donne un $w \in \mathcal{H}$ associé à la forme linéaire ℓ_v mentionnée dans le domaine, on pose $A^*v = w$. Si w' est un autre candidat alors pour tout $u \in \text{Dom}(A)$

$$\langle u, w - w' \rangle = 0$$

donc $w = w'$ par densité de $\text{Dom}(A)$. \square

On voit que la densité du domaine est *nécessaire* pour que A^* soit bien défini. **Attention** le domaine de A^* n'est pas nécessairement dense.

■ **Exemple 2.25** Calculons l'adjoint de $A = \partial_x$ sur $L^2(\mathbb{R})$, avec domaine C_0^∞ . On remarque d'abord que C_0^∞ est bien dense dans L^2 . On cherche les $v \in L^2$ tels que

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni u \mapsto \langle \partial_x u, v \rangle$$

s'étende en une f.l.c sur $L^2(\mathbb{R})$: il existe $w \in L^2$ tel que $\langle \partial_x u, v \rangle = \langle u, w \rangle$. Vu dans \mathcal{D}' , avec u à valeurs réelles, ça donne

$$\langle v, \partial_x u \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle w, u \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

soit

$$-\langle \partial_x v, u \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle w, u \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

donc $\partial_x v = w$ dans \mathcal{D}' . Autrement dit $\partial_x v \in L^2$, càd $v \in H^1(\mathbb{R})$. Réciproquement si $v \in H^1$, ça marche. Donc $A^* = -\partial_x$ avec $\text{Dom}(A^*) = H^1$, et on peut voir ça comme définition de H^1 ! \blacksquare

Remarque : comme dans l'exemple, on a de façon générale :

Proposition 2.26 $v \in \text{Dom}(A^*) \iff$ il existe $w \in \mathcal{H}$ tel quel

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, w \rangle \quad \forall u \in \text{Dom}(A)$$

Définition 2.27 $(A, \text{Dom}(A))$ (à domaine dense) est **auto-adjoint** si $\text{Dom}(A^*) = \text{Dom}(A)$ et $A = A^*$.

Proposition 2.28 $(A, \text{Dom}(A))$ est auto-adjoint \iff il est symétrique et $\text{Dom}(A^*) = \text{Dom}(A)$.

Démonstration. Le sens direct est évident par (2.1). Réciproquement, s'il est symétrique alors pour tout $u, v \in \text{Dom}(A)$ on a $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ par symétrie et $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$ par définition de l'adjoint. Par densité du domaine, $Av = A^*v$. \square

Exercice 2.29 Si A est fermé et B est borné, alors $(A + B, \text{Dom}(A))$ est fermé et $(A + B)^* = A^* + B^*$ avec domaine $\text{Dom}((A + B)^*) = \text{Dom}(A^*)$. \blacksquare

2.9 Interprétation symplectique

Structure hilbertienne produit sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Forme symplectique $\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \langle u_2, v_1 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle$. Sesquilinéaire et anti-hermitienne, continue. Lien entre les deux : la « structure complexe » $J(v) = (-v_2, v_1)$ (isométrie de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$) ; on a

$$\Omega(u, v) = \langle u, J(v), \cdot \rangle$$

Lemme 2.30 Si $\text{Dom}(A)$ est dense, le graphe de A^* est l'orthogonal symplectique de G_A :

$$G_{A^*} = G_A^\Omega$$

Démonstration. On écrit la déf de G_A^Ω □

Corollaire 2.31 Un adjoint est toujours fermé.

Lemme 2.32 A est symétrique ssi G_A est isotrope. Si $\text{Dom}(A)$ est dense, A est symétrique ssi $A \subset A^*$

Démonstration. Car dire que G_A est isotrope c'est dire que $G_A \subset G_A^\Omega$. □

Corollaire 2.33 Si A est symétrique alors sa fermeture (si elle existe) est symétrique.

Démonstration. Si Ω s'annule sur $G_A \times G_A$, par continuité il s'annule sur l'adhérence. □

Corollaire 2.34 Tout opérateur symétrique à domaine dense est fermable, et $\text{Dom}(A^*)$ est dense.

Démonstration. On a $G_A \subset \overline{G_A} \subset G_{A^*}$. En particulier le domaine de A^* contient celui de A . □

Lemme 2.35 Si $\text{Dom}(A)$ est dense, alors : $\text{Dom}(A^*)$ est dense ssi A est fermable, et dans ce cas $\overline{A} = A^{**}$.

Démonstration. On remarque que $V^\Omega = (J(V))^\perp$, et donc $J(V^\Omega) = V^\perp$, car J isométrique et $J^2 = -\text{Id}$. En utilisant que $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$ on déduit que

$$\overline{G_A} = (G_A^\perp)^\perp = J(G_A^\Omega)^\perp = J(G_{A^*})^\perp = (G_{A^*})^\Omega. \quad (2.2)$$

Si $\text{Dom}(A^*)$ est dense, c'est égal à $G_{A^{**}}$, et donc $\overline{A} = A^{**}$. Réciproquement si $\text{Dom}(A^*)$ n'est pas dense, il existe $u \in \mathcal{H}$ non nul dans $\text{Dom}(A^*)^\perp$, et donc $(u, 0) \in G_{A^*}^\perp$. Donc, par J , $(0, -u) \in G_{A^*}^\Omega = \overline{G_A}$; donc ce dernier ne peut pas être un graphe, donc A n'est pas fermable. □

Attention l'adjoint d'un opérateur symétrique n'est pas forcément symétrique.

Lemme 2.36 Si A est symétrique à domaine dense, alors (A^* est symétrique ssi $A^* = \overline{A}$)

Démonstration. A^* est symétrique ssi $G_{A^*} \subset G_{A^*}^\Omega$, et ce dernier est égal à $\overline{G_A}$ par (2.2). D'autre part puisque A est symétrique on a toujours $\overline{G_A} \subset G_{A^*}$ car ce dernier est fermé. Donc c'est équivalent à $\overline{G_A} = G_{A^*}$. Or A est fermable car symétrique donc c'est équivalent à $\overline{G_A} = G_{\overline{A}}$, et donc à $A^* = \overline{A}$. □

■ **Exemple 2.37** Voir 2.25 : $A = i\partial_x$ est symétrique sur $L^2(\mathbb{R})$ avec domaine C_0^∞ . Son adjoint $B = A^*$ est $(i\partial_x)$, avec domaine $H^1(\mathbb{R})$. Ce dernier est symétrique, mais différent du premier. En en déduit que le premier n'est **pas fermé**. ■

Exercice 2.38 Montrer que $B = \overline{A}$, et que B est auto-adjoint. ■

Démonstration. En utilisant que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$ on voit que $B = A^*$ est symétrique, et donc par le Lemme 2.36, $\overline{A} = A^* = B$. Par (2.2), $\overline{A} = A^{**}$ donc $B = B^*$. □

Corollaire 2.39 Si A symétrique **fermé** à domaine dense, alors (A est auto-adjoint ssi A^* est symétrique)

Exercice 2.40 Si $\text{Dom}(A)$ est dense et $A \subset B$, alors $B^* \subset A^*$. ■

Démonstration. Par la prop 2.26, $v \in \text{Dom}(B^*)$ ss'il existe $w \in \mathcal{H}$ tel que $\langle Bu, v \rangle = \langle u, w \rangle$ pour $u \in \text{Dom}(B)$. En particulier c'est vrai pour $u \in \text{Dom}(A)$, donc v est bien dans $\text{Dom}(A^*)$. □

■ **Exemple 2.41** $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$. On pose

- ($A = i\partial_x, \text{Dom}(A) = C_0^\infty(]0, 1[)$)
- ($B = i\partial_x, \text{Dom}(B) = C^\infty([0, 1])$)
- ($C = i\partial_x, \text{Dom}(C) = \{u \in C^\infty([0, 1]); u(0) = u(1) = 0\}$)

B et C sont des extensions de A . B est une extension de C . A et C sont symétriques, B n'est pas symétrique. Par la Prop 2.26, $v \in \text{Dom}(A^*)$ ssi $\exists w \in L^2(0, 1)$ tel que $\langle Au, v \rangle = \langle u, w \rangle$ pour tous $u \in \text{Dom}(A) = C_0^\infty$. Comme plus haut, on voit donc que $w = iv'$ dans $\mathcal{D}'(0, 1)$. Donc $v' \in H^1(0, 1)$; et c'est une équivalence (remonter les calculs), donc $\text{Dom}(A^*) = H^1(0, 1)$.

En particulier on voit que $B \subset A^*$. Puisque B n'est pas symétrique (prendre $u = 1$ et $v \in C^\infty$ qui a des valeurs différentes en 0 et 1) on en déduit que A^* n'est pas symétrique. Donc A ne peut pas être auto-adjoint.

(Remarque, par injection de Sobolev $H^1(0, 1) \subset C^0([0, 1])$.)

■

2.10 Spectre d'un opérateur non borné

Seulement les définitions basiques pour se mettre en bouche. Voir le chapitre 6 pour plus de résultats.

Définition 2.42 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur sur un Hilbert \mathcal{H} (marche aussi sur un Banach). Le **spectre** de $(A, \text{Dom}(A))$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda\text{Id} : \text{Dom}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ n'admette **pas** d'inverse bornée. **Notation** $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$.

Définition 2.43 Si $A - \lambda\text{Id}$ n'est pas injectif, alors λ est une **valeur propre**. **Vecteur propre...**

Évidemment les valeurs propres sont dans le spectre. Donc si $\lambda \in \sigma(A)$,

1. soit λ est vap
2. soit $A - \lambda\text{Id}$ est injectif mais pas surjectif
3. soit $A - \lambda\text{Id}$ est bijectif mais l'inverse n'est pas bornée.

Exercice 2.44 Si A est fermé, le cas 3 ne peut pas arriver. ■

Démonstration. Dans ce cas $A - \lambda \text{Id}$ est fermé (cf Problème 2.29) et dans ce cas on a le théorème du graphe fermé. □

En d'autres termes :

Proposition 2.45 Si A n'est pas fermé, son spectre est \mathbb{C} entier.

Démonstration. Si $A - \lambda \text{Id}$ est bijectif, l'inverse n'est pas bornée! □

Évidemment on ne va donc pas s'intéresser au spectre d'opérateurs non fermés... Si A est fermé, on voit que $\lambda \in \sigma(A)$ ssi $A - \lambda \text{Id}$ n'est pas bijectif (car si bijectif, alors on a vu (Problème 2.19) que son inverse est automatiquement continue.)

Exercice 2.46 En dimension finie, le spectre est l'ensemble des valeurs propres. ■

Proposition 2.47 — Suites de Weyl. Soit $(A, \text{Dom}(A))$. S'il existe une suite $u_n \in \text{Dom}(A)$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $(A - \lambda)u_n \rightarrow 0$, alors $\lambda \in \sigma(A)$.

Démonstration. Par l'absurde, si $(A - \lambda)^{-1}$ existe et est bornée, alors par composition on obtient $u_n \rightarrow 0$, absurde. □

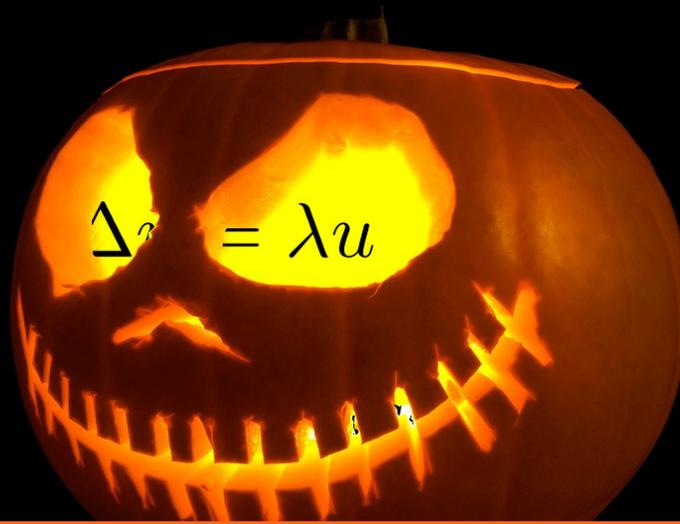
■ **Exemple 2.48** [2, Exemple 3.14] Opérateur de multiplication sur $L^2(0, 1)$, $T_f u = fu$ où $f \in C^0([0, 1]; \mathbb{C})$. En construisant l'inverse on montre facilement que le spectre doit être contenu dans l'intervalle $f([0, 1])$. Réciproquement, si $f(x_0) = \lambda$, en prenant une suite de fonctions qui se concentrent sur x_0 ($\sqrt{n}\varphi(n(x - x_0))$), on construit une suite de Weyl. (Si on est sur le bord, attention de bien normaliser la suite : prendre une fonction $\|\varphi\| = 2$ symétrique. Ou alors utiliser la proposition 2.49 ci-dessous). ■

Proposition 2.49 $\sigma(A)$ est fermé.

Démonstration. Supposons que $\lambda \notin \sigma(A)$; en remplaçant A par $A - \lambda$ (question : comment est transformé le spectre?) on peut se ramener à $\lambda = 0$. Donc A^{-1} est borné. Prenons $\epsilon \in \mathbb{C}$ de module assez petit pour que $\|\epsilon A^{-1}\| < 1$, ce qui implique que $I + \epsilon A^{-1}$ est borné et inversible. Posons $B = (I + \epsilon A^{-1})^{-1} A^{-1}$. Pour $v \in \mathcal{H}$, soit $u = Bv$. $(I + \epsilon A^{-1})u = A^{-1}v \in \text{Dom}(A)$ donc $u \in \text{Dom}(A)$ et on peut calculer Au en composant par A ce qui donne $Au + \epsilon u = v$ donc $(A + \epsilon)u = v$, donc B est l'inverse de $(A + \epsilon)$, donc $\epsilon \notin \sigma(A)$. Le complémentaire du spectre est bien ouvert. □

On verra plus tard que $z \mapsto (A - z)$ est holomorphe en un certain sens, sur le complémentaire du spectre.





3. Théorèmes de Lax-Milgram

Cadre hilbertien.

Le point de vue des formes quadratiques. On veut définir un opérateur A grâce à une forme quadratique a en posant $\langle Au, v \rangle = a(u, v)$.

3.1 Le cas borné

Définition 3.1 a sesquilinéaire sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ (linéaire à gauche)

Exercice 3.2 Mq a est continue ssi. . . ■

Définition 3.3 a est **coercive** : $|a(u, u)| \geq \frac{1}{C} \|u\|^2$, $C > 0$.

Proposition 3.4 Si a est continue elle définit un unique A continu.

Démonstration.

Existence et unicité : Riesz pour la forme anti-linéaire $v \mapsto a(u, v)$.

Pour la continuité on peut estimer $\|Au\|^2$ avec la continuité de a . □

Exercice 3.5 Sur $L^2(0, 1)$, la forme $a(u, v) = \int_0^1 tu(t)\bar{v}(t)dt$ est « définie positive », càd $a(u, u) > 0$ pour $u \neq 0$, mais elle n'est pas coercive. ■

Théorème 3.6 Si a est continue et coercive alors $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est inversible.

Démonstration.

On prouve d'abord : injectif+image fermée par la proposition 2.4, en utilisant la coercivité. Puis on montre que l'image est dense en montrant que l'orthogonal est nul (prendre $u = v$). On conclut par le théorème de Banach. □

3.2 Le cas non borné

On se donne un triplet $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, a)$ où \mathcal{G} s'injecte densément continûment dans \mathcal{H} . a est une forme sesquilinéaire définie sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

Par exemple $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et $a(u, v) = \langle u, v \rangle_{H^1} = \int u \bar{v} + \int \nabla u \cdot \overline{\nabla v}$.

On suppose que \mathcal{G} et \mathcal{H} sont des Hilbert, mais **attention** l'inclusion $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ n'est pas Hilbertienne! Les produits scalaires sont différents.

La continuité de l'inclusion dit que la norme de \mathcal{H} est « contrôlée » par la norme de \mathcal{G} (i.e. $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\cdot\|_{\mathcal{G}}$). Donc toute forme linéaire sur \mathcal{G} qui est \mathcal{H} -continue est aussi \mathcal{G} -continue, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

■ **Exemple 3.7** sur $H^1(\mathbb{R}) \subset L^2$ (fn continues par injection de Sobolev) l'application $u \rightarrow u(0)$ est H^1 -continue mais ne peut clairement pas être contrôlée par la norme L^2 . ■

Par Lax-Milgram borné, on peut définir $A_{\mathcal{G}} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, inversible. Mais on veut maintenant utiliser le produit scalaire « plus faible » de \mathcal{H} .

On veut donc $v \mapsto a(u, v)$ \mathcal{H} -continue, donc on pose

$$\text{Dom}(A) = \{u \in \mathcal{G}; \quad v \mapsto a(u, v) \text{ est } \mathcal{H}\text{-continue sur } \mathcal{G}\}.$$

Proposition 3.8 a définit un unique $(A, \text{Dom}(A))$ tel que

$$\langle Au, v \rangle_{\mathcal{H}} = a(u, v), \quad \forall u \in \text{Dom}(A), \forall v \in \mathcal{G}.$$

Démonstration. Par densité on prolonge en une fnc sur \mathcal{H} et on applique Riesz. □

Théorème 3.9 Si a est \mathcal{G} -coercive alors A est inversible (i.e. d'inverse bornée), et $\text{Dom}(A)$ est dense dans \mathcal{H} .

Démonstration.

1. *Injectivité.* Soit $u \in \text{Dom}(A)$ avec $Au = 0$.

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|u\|_{\mathcal{G}}^2 \leq \tilde{C} |a(u, u)| = \tilde{C} |\langle Au, u \rangle| = 0.$$

Ça donne l'injectivité, et même mieux : $\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \tilde{C} \|Au\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}$ donc

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \tilde{C} \|Au\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.1}$$

2. *Surjectivité.* Soit $h \in \mathcal{H}$ donné, on cherche $u \in \text{Dom}(A)$, $Au = h$. En prenant le produit scalaire avec $v \in \mathcal{G}$ arbitraire, c'est équivalent à $a(u, v) = \langle h, v \rangle_{\mathcal{H}}$. Puisque $v \mapsto \langle h, v \rangle_{\mathcal{H}}$ est \mathcal{H} -continue, elle est aussi \mathcal{G} -continue, donc par \mathcal{G} -Riesz, on trouve $g \in \mathcal{G}$ tel que $\langle h, v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle g, v \rangle_{\mathcal{G}}$.

D'autre part, par Lax-Milgram borné, on a $a(u, v) = \langle A_{\mathcal{G}}u, v \rangle_{\mathcal{G}}$, pour tous $u, v \in \mathcal{G}$.

On pose donc $u = A_{\mathcal{G}}^{-1}g$, ce qui donne $\langle h, v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Ag, v \rangle_{\mathcal{G}} = a(u, v)$. Pour en déduire $Au = h$ il suffit de vérifier que $u \in \text{Dom}(A)$, càd $v \mapsto a(u, v)$ \mathcal{H} -continue, ce qui est automatique car $= \langle h, v \rangle_{\mathcal{H}}$.

3. *Continuité de A^{-1} .* Utilise l'inégalité d'injectivité ci-dessus.

4. *Densité de $\text{Dom}(A)$ dans \mathcal{H} .* Soit $h \in \text{Dom}(A)^\perp$, on a $\forall u \in \text{Dom}(A), \langle u, h \rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Par surjectivité, on peut écrire $h = Av$ avec $v \in \text{Dom}(A)$. On obtient $a(u, v) = 0$ pour tous $u \in \text{Dom}(A)$; en particulier $a(v, v) = 0$, donc $v = 0$, donc $h = 0$. □

■ **Exemple 3.10** On prend $a =$ le produit scalaire $H^1 = \mathcal{G}$, avec $\mathcal{H} = L^2$. Alors $A_{\mathcal{G}} = \text{Id}$ est trivial; mais par contre on obtient $A = -\Delta + I$ avec $-\Delta = \nabla^* \nabla$. Le domaine : $u \in \text{Dom}(A) \iff u \in H^1$ et $v \mapsto a(u, v)$ est L^2 -continue = $\langle Au, v \rangle_{L^2}$. Donc on peut voir Au comme une distribution, et on trouve

$$\langle Au, \bar{v} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = a(u, v) = \langle u - \Delta u, \bar{v} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \quad \forall v \in C_0^\infty.$$

Donc $Au = u - \Delta u$ dans \mathcal{D}' . Or $Au \in L^2$, donc $\Delta u \in L^2$.

Réciproquement, si $\Delta u \in L^2$, le même calcul montre que $v \mapsto a(u, v)$ est L^2 -continu, donc $u \in \text{Dom}(A)$. Conclusion :

$$\text{Dom}(A) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n); \Delta u \in L^2\} = H^2(\mathbb{R}^n);$$

et

$$A = -\Delta + I$$

Le théorème indique en outre que $-\Delta + I : H^2 \rightarrow L^2$ est inversible. ■

3.3 Le cas hermitien

■ **Définition 3.11** a hermitienne si $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$.

Théorème 3.12 Sous les hypothèses de 3.9, si a est hermitienne, alors $A = A^*$, et $\text{Dom}(A)$ est dense dans \mathcal{G} . (Dans \mathcal{H} on le savait déjà.)

Démonstration. On voit que A est symétrique, soit $A \subset A^*$. Réciproquement soit $v \in \text{Dom}(A^*)$. Par surjectivité de A , $\exists v_0 \in \text{Dom}(A)$ tq $Av_0 = A^*v$. Donc pour tout $u \in \text{Dom}(A)$,

$$\langle Au, v_0 \rangle = \langle u, Av_0 \rangle = \langle u, A^*v \rangle = \langle Au, v \rangle.$$

C'est vrai pour tout u et A est surjectif, donc $v = v_0 : \text{Dom}(A^*) \subset \text{Dom}(A)$, donc égalité.

Densité dans \mathcal{G} : Soit $g \in \text{Dom}(A)^\perp$, soit $\langle g, u \rangle_{\mathcal{G}} = 0$ pour tout $u \in \text{Dom}(A)$. On écrit $g = A_{\mathcal{G}}v$ et

$$0 = \langle A_{\mathcal{G}}v, u \rangle_{\mathcal{G}} = a(v, u) = \overline{a(u, v)} = \overline{\langle Au, v \rangle_{\mathcal{H}}} = \langle v, Au \rangle_{\mathcal{H}},$$

et encore par surjectivité de A , $v = 0$ donc $g = 0$. □

Théorème 3.13 Le spectre d'un opérateur auto-adjoint est réel.

Démonstration . [On ne démontre que le cas **borné** comme application de Lax-Milgram. Pour le cas général, ça peut se démontrer plus directement (facilement), voir Théorème 7.5, mais apparemment pas avec Lax-Milgram (si on ne veut pas parler de la racine $|A|^{1/2}$...)].

A est symétrique donc $\langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$, donc on sépare parties réelle et imaginaire dans :

$$|\langle (A - \lambda)u, u \rangle|^2 = |\langle (A - \Re \lambda)u, u \rangle + i\langle (\Im \lambda)u, u \rangle|^2 \geq |\Im \lambda|^2 \|u\|^4.$$

Donc la forme $(u, v) \mapsto \langle (A - \lambda)u, v \rangle$ est coercive sur \mathcal{H} , et donc l'opérateur associé $A - \lambda$ est inversible. □

Exercice 3.14 Montrer par Lax-Milgram que $-\Delta + \mu \text{Id} : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est inversible pour tous $\mu > 0$. ■

3.4 Extension de Friedrichs

Définition 3.15 Un op $(A, \text{Dom}(A))$ symétrique est **minoré** (les anglais traduiront : **semi-borné inférieurement**) si $\langle Au, u \rangle \geq -C \|u\|^2$ pour un $C \in \mathbb{R}$ (le « - » étant donc cosmétique puisqu'on admet $C < 0$).

■ **Exemple 3.16** $P = -\Delta + V$ avec $V(x) \geq -C$ dans $C^0(\mathbb{R}^n)$, avec domaine C_0^∞ . ■

Théorème 3.17 Si $(A, \text{Dom}(A))$ est symétrique et minoré, à domaine dense, alors il admet une extension auto-adjointe. Cette extension est en générale non unique. La construction donnée dans la preuve s'appelle l'**extension de Friedrichs**.

Démonstration. On considère la f.sequilineaire sur $\text{Dom}(A)$

$$a_0(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

On peut supposer $a_0(u, u) \geq \|u\|^2$ en remplaçant A par $A + (C + 1)\text{Id}$. (Puis appliquer l'exercice 2.29.)

On voudrait appliquer Lax-Milgram mais $\text{Dom}(A)$ n'est pas Hilbertien (et a_0 pas continu...). **Astuce** norme $p_0(u) = \sqrt{a_0(u, u)}$, ça rend $\text{Dom}(A)$ pré-hilbertien, et on le complète dans \mathcal{H} . On obtient un Hilbert \mathcal{G} :

$$\mathcal{G} = \{u \in \mathcal{H}; \exists (u_n) \in \text{Dom}(A) \text{ tq } u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{H} \text{ et } (u_n) \text{ Cauchy pour } p_0\} \quad (3.2)$$

Proposition 3.18 \mathcal{G} défini par (3.2) est un Hilbert pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{G}} := \lim_n p_0(u_n)$$

(voir justifications après) On a donc $\|u\|_{\mathcal{G}}^2 = \lim(p_0(u_n))^2 = \lim a_0(u, u) \geq \|u\|_{\mathcal{H}}^2$ donc l'injection $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ est continue. Et donc dense car \mathcal{G} contient $\text{Dom}(A)$.

On peut donc appliquer Lax-Milgram non borné Hermitien avec

$$a(u, v) = \langle u, v \rangle_{\mathcal{G}}$$

On obtient un opérateur auto-adjoint \tilde{A} qui étend A avec domaine dense $\text{Dom}(\tilde{A}) \subset \mathcal{G}$.

□

R Si A est déjà auto-adjoint, bien sûr la construction redonne A , car un opérateur auto-adjoint n'admet pas d'autre extension auto-adjointe que lui-même : $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$, càd $B \subset A$.

■ **Exemple 3.19** $A = -\Delta$ avec $\text{Dom}(A) = C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert borné dans \mathbb{R}^n . On obtient $\tilde{A} =$ réalisation de Dirichlet, domaine $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. ■

Preuve de la proposition : on utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.20 La suite $p_0(u_n)$ est de Cauchy.

Démonstration. $p_0(u_n) - p_0(u_m) \leq p_0(u_n - u_m)$ car p_0 est une norme (inégalité triangulaire : $(u_n - u_m) + u_m$). □

Lemme 3.21 Si $u_n \rightarrow 0$ et p_0 -Cauchy alors $p_0(u_n) \rightarrow 0$.

Démonstration. On sait que $p_0(u_n)$ converge, supposons vers $\alpha > 0$. On a

$$a_0(u_n, u_m) = a_0(u_n, u_n) + a_0(u_n, u_m - u_n).$$

Par Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire a_0 on voit que

$$|a_0(u_n, u_m) - \alpha^2| \leq \epsilon$$

pour $\min(n, m)$ assez grand. En particulier $a_0(u_n, u_m) \geq \alpha^2/2$. Or, puisque $a_0(u_n, u_m) = \langle Au_n, u_m \rangle$ et $u_m \rightarrow 0$, si on fait $m \rightarrow \infty$, $a_0(u_n, u_m) \rightarrow 0$, contradiction. □

Lemme 3.22 La déf de $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$ ne dépend pas de la suite de Cauchy.

Démonstration. Un subtil calcul donne

$$p_0^2(u_n - v_n) = p_0^2(u_n) - p_0^2(v_n) + 2\Re a(v_n, v_n - u_n).$$

Si $u_n \rightarrow u$ et $v_n \rightarrow u$, le premier terme tend vers 0 par le Lemme précédent, et le dernier terme tend vers 0 par Cauchy-Schwarz. Voici le calcul :

$$a_0(u - v, u - v) = a_0(u, u) + a_0(v, v) - a_0(u, v) - a_0(v, u) \quad (3.3)$$

$$= a_0(u, u) - a_0(v, v) + 2a_0(v, v) - a_0(u, v) - a_0(v, u) \quad (3.4)$$

$$= a_0(u, u) - a_0(v, v) + a_0(v - u, v) + a_0(v, v - u) \quad (3.5)$$

$$= p_0(u)^2 - p_0(v)^2 + 2\Re a(v, v - u). \quad (3.6)$$

□

Corollaire 3.23 Si (u_n) est une suite comme dans la définition, alors $\|u_n - u\|_{\mathcal{G}} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Démonstration. En effet pour n fixé la suite $(u_n - u_k)_k$ est bien p_0 -Cauchy et converge vers $u_n - u$ quand $k \rightarrow \infty$, donc $\|u_n - u\|_{\mathcal{G}} = \lim_k p_0(u_n - u_k)$. Pour $\epsilon > 0$ donné, on trouve N tel que $p_0(u_n - u_k) < \epsilon$ dès que $n, k \geq N$. Donc $\|u_n - u\| \leq \epsilon$. \square

Démonstration de la Proposition. \mathcal{G} est pré-hilbertien avec le produit scalaire associé à p_0 (autrement dit $\langle u, v \rangle_{\mathcal{G}} = \lim a_0(u_n, v_n)$). Il reste à montrer qu'il est complet. Mais $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\cdot\|_{\mathcal{G}}^2$ par coercivité, donc l'injection $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ est continue, et donc si la suite $g_n \in \mathcal{G}$ est de Cauchy dans \mathcal{G} , alors elle est de Cauchy dans \mathcal{H} . Donc elle converge vers un $g \in \mathcal{H}$. D'autre part, pour chaque n fixé, il existe une k -suite $u_{n,k} \in \text{Dom}(A)$ qui est p_0 -Cauchy et telle que $u_{n,k} \rightarrow g_n$ quand $k \rightarrow \infty$. Par le corollaire ci-dessus, $\|u_{n,k} - g_n\|_{\mathcal{G}} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Soit $k(n)$ tel que $\|u_{n,k} - g_n\|_{\mathcal{G}} \leq 1/n$ quand $k \geq k(n)$. Posons $\tilde{g}_n = u_{n,k(n)}$. C'est une suite p_0 -Cauchy dans $\text{Dom}(A)$: en effet :

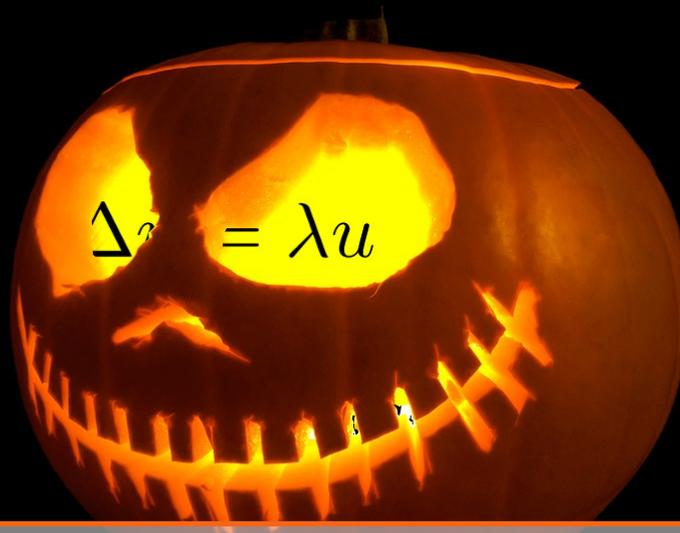
$$p_0(\tilde{g}_n - \tilde{g}_m) = \|\tilde{g}_n - \tilde{g}_m\|_{\mathcal{G}} \leq \|\tilde{g}_n - g_n\|_{\mathcal{G}} + \|g_n - g_m\|_{\mathcal{G}} + \|\tilde{g}_m - g_m\|_{\mathcal{G}} \quad (3.7)$$

$$\leq \frac{1}{n} + \epsilon + \frac{1}{m}, \quad (3.8)$$

où le ϵ vient du caractère \mathcal{G} -Cauchy de (g_n) . D'autre part $\|\tilde{g}_n - g\|_{\mathcal{H}} \leq \|\tilde{g}_n - g_n\|_{\mathcal{H}} + \|g_n - g\|_{\mathcal{H}}$. Le deuxième tend vers 0 comme mentionné plus haut, et le premier est majoré par $\|\tilde{g}_n - g_n\|_{\mathcal{G}} \leq 1/n$. Donc $\tilde{g}_n \rightarrow g$ dans \mathcal{H} , et on en déduit que $g \in \mathcal{G}$, et le corollaire donne $\|\tilde{g}_n - g\|_{\mathcal{G}} \rightarrow 0$, donc on peut finalement écrire $\|g_n - g\|_{\mathcal{G}} \leq \|\tilde{g}_n - g_n\|_{\mathcal{G}} + \|\tilde{g}_n - g\|_{\mathcal{G}} \leq \frac{1}{n} + \|\tilde{g}_n - g\|_{\mathcal{G}}$, qui tend bien vers 0. \square

Exercice 3.24 (difficile?) Si $A = \Delta$, $\text{Dom}(A) = C_0^\infty(\Omega)$, ouvert borné dans \mathbb{R}^n , alors $\text{Dom}(\tilde{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. On l'appelle la réalisation de Dirichlet du Laplacien. ■





4. Rappels sur les opérateurs compacts

Révisions préalables : compacité, espaces de Sobolev

Rappels : compact, (respectivement précompact) dans un métrique avec les suites extraites convergentes (resp. suites extraites de Cauchy). Relativement compact.

On supposera que E, F sont des Hilbert.

4.1 Opérateurs compacts

Définition 4.1 Opérateur compact : l'image de la boule unité est relativement compacte.

Proposition 4.2 $\dim E < \infty$ ssi l'identité $E \rightarrow E$ est compacte.

Démonstration. Théorème de Riesz : la BU est relativement compacte \iff dim finie. \square

Proposition 4.3 Un opérateur compact est borné.

Démonstration. l'image de la BU est bornée. \square

Proposition 4.4 Un op **borné** $L : E \rightarrow F$ est compact ssi pour toute suite u_n convergeant **faiblement** vers 0, alors $Lu_n \rightarrow 0$.

(donc plus fort que continu!!) **Démonstration.** Soit $u_n \rightharpoonup 0$. u_n est borné par Banach-Steinhaus, donc (Lu_n) est relativement compacte, on peut extraire $Lu_{n_k} \rightarrow u$. $\langle Lu_{n_k}, v \rangle = \langle u_{n_k}, L^*v \rangle \rightarrow 0$. Donc Lu_{n_k} converge faiblement vers 0, donc $u = 0$. Comme le raisonnement reste vrai pour toute sous-suite de Lu_n , en fait Lu_n converge. (une suite converge vers 0 ssi toute sous-suite admet une sous-suite convergente vers 0.)

Récip. On se donne (u_n) bornée. Banach-Alaoglu, la BO est relat. compact pour

la topo faible*. Donc il existe une suite extraite tq pour tout $h \in \mathcal{H}$ $\langle h, u_{n_k} \rangle$ converge vers $\langle h, u \rangle$. Par hypothèse on obtient $L(u_{n_k} - u) \rightarrow 0$. \square

Définition 4.5 $\mathcal{K}(E, F)$; l'idéal $\mathcal{K}(E)$.

Proposition 4.6 Les opérateurs bornés de rang fini sont compacts.

Démonstration. (Évidemment pas vrai sans « borné »). L'image de la BU est contenue dans un espace de dimension finie, et elle est bornée, donc relativement compacte. \square

Théorème 4.7 $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{B}(E, F)$.

Donc toute limite d'op de rang fini est compacte.

Proposition 4.8 Tout op compact est limite d'opérateurs de rang fini.

(Car Hilbert. Ne marche pas sur un Banach général)

Proposition 4.9 L'adjoint (borné) d'un compact est compact.

4.2 Injections de Sobolev etc.

Cf cours EDP Elliptiques.

Théorème 4.10 $\forall R > 0$ l'injection $H^1(B(0, R)) \hookrightarrow L^2(B(0, R))$ est compacte.

On ne peut pas remplacer $B(0, R)$ par un ouvert Ω général, même borné, car on ne sait pas toujours prolonger une fonction $H^1(\Omega)$ dans H^1 d'une boule contenant Ω . On arrive à contrôler les dérivées quand Ω est à bord régulier. Dans le cas général, il faut supposer que les fonctions s'annulent au bord :

Théorème 4.11 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte pour tout Ω ouvert borné.

Il y a des généralisations aux cas Banach : (Rellich-Kondrachov) :

$$W^{1,p}(B(0, R)) \hookrightarrow L^q(B(0, R))$$

est compacte si $1 \leq q < p^*$ avec $p^* = \frac{np}{n-p}$ si $p < n$ (si $p = 2$ on retrouve $H^1 \subset L^2$ comme cas particulier).

Dans le cas non borné, c'est faux, mais par exemple on a :

Corollaire 4.12 — du théorème 4.10. Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Alors l'opérateur de multiplication par f

$$T_f : H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto fu$$

est compact.

Démonstration exercice. Tronquer (χ_R avec $R \rightarrow \infty$) et utiliser le théorème 4.10.

\square

Théorème 4.13 Schrödinger : on considère l'opérateur $P = -\Delta + V$ avec $V \rightarrow \infty$ à l'infini de \mathbb{R}^n (défini par exemple par extension de Friedrichs, ou Lax-Milgram avec la forme quadratique associée.). Alors pour tout $\lambda \notin \sigma(P)$, $(P - \lambda)^{-1}$ est compacte.

Démonstration. exercice ? □

4.3 Spectre d'un opérateur compact – début

Proposition 4.14 Soit A un op. compact sur \mathcal{H} de dimension infinie. Alors $0 \in \sigma(A)$ et les autres éléments du spectre sont des valeurs propres de multiplicité géométrique finie.

Démonstration début. Si $0 \notin \sigma(A)$ alors $A : \text{Dom}(A) = \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est inversible, donc $I = AA^{-1}$ est compact, donc dimension finie (Proposition 4.2).

Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, **et si c'est une valeur propre** on a $A = \lambda \text{Id}$ sur $\ker(A - \lambda)$, qui est donc de dimension finie par Proposition 4.2. (La restriction d'un compact à un sous-espace fermé invariant E' est compacte $E' \rightarrow E'$). Pour le cas général, on aura besoin de l'alternative de Fredholm, voir chapitre suivant : Théorème 5.12. □





5. Théorie de Fredholm

Révisions préalables : fonctions holomorphes

Fredholm (1866-1927) mathématicien suédois, précurseur de la théorie spectrale. Ses travaux auraient influencé Hilbert pour la création des « espaces de Hilbert ».

5.1 Opérateurs de Fredholm

On suppose que E, F sont des Hilbert.

noyau = $\ker T$, conoyau = $\text{Coker } T = F/T(E)$ (quotient algébrique).

Proposition 5.1 *Si $\dim \text{Coker } T < \infty$ alors $T(E)$ est fermée, et $\text{Coker } T \simeq \ker T^*$.*

Rappel $T^* : F \rightarrow E$ est l'adjoint au sens borné usuel. **Démonstration.** On se ramène au cas T injective en posant $\tilde{E} = E/\ker T$ ($\ker T$ est fermé car T continue, donc \tilde{E} est Hilbertien, isomorphe au supplémentaire orth de $\ker T$.)

Soit G un supplémentaire algébrique de $T(E)$ dans $F : F = G \oplus T(E)$. L'application $G \ni g \mapsto [g] \in \text{Coker } T$ est bijective : injective car $[g] = 0 \Rightarrow g \in T(E) \Rightarrow g = 0$; surjective car si $[f] \in \text{Coker } T$, on décompose $f = g + v$ et bien sûr $[f] = [g]$.

Donc G est de dimension finie, on peut le paramétrer par une base, c'est-à-dire une application linéaire injective (forcément continue) $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow F$ telle que $G = \varphi(\mathbb{C}^n)$. On a donc une application continue :

$$\Phi : E \times \mathbb{C}^n \rightarrow F \tag{5.1}$$

$$(u, x) \mapsto Tu + \varphi x. \tag{5.2}$$

Elle est injective : si $Tu = -\varphi x$ alors par somme directe $\varphi x = 0$ donc $x = 0$, donc $Tu = 0$, donc $u = 0$. Elle est surjective : tout $f \in F$ s'écrit $f = Tu + g$.

Donc par le théorème de Banach Φ^{-1} est continue. Donc $T(E) = (\Phi^{-1})^{-1}(E \times \{0\})$ est fermé.

Pour le dernier point : puisque $T(E)$ est fermée, on a $F = T(E) \oplus T(E)^\perp$, donc $\text{Coker } T \simeq T(E)^\perp = \ker T^*$. \square

Définition 5.2 Un opérateur borné $T \in \mathcal{B}(E, F)$ est dit **Fredholm** si son noyau et son conoyau sont de dimension finie. On notera $T \in \text{Fred}(E, F)$.

Définition 5.3 L'indice d'un opérateur de Fredholm est

$$\text{Ind } T = \dim \ker T - \dim \text{Coker } T$$

■ **Exemple 5.4** Un opérateur bijectif est Fredholm d'indice 0. ■

R

1. On a donc, par la proposition, $\text{Ind } T = \dim \ker T - \dim \ker T^*$
2. Donc un opérateur Fredholm auto-adjoint est toujours d'indice 0.
3. si E, F sont de dimension finie, tout opérateur est Fredholm et son indice **ne dépend pas de l'opérateur!** (théorème du rang : $\text{Ind } T = \dim E - \dim F$)

Définition 5.5 $T \in \mathcal{B}(E, F)$ est dit **semi-Fredholm** si

1. $T(E)$ est fermée
2. $\ker T$ est de dimension finie.

Donc par la proposition, Fredholm implique semi-Fredholm.

Proposition 5.6 Soit $T \in \mathcal{B}(E, F)$. On a l'équivalence :

1. T semi-Fredholm ;
2. De toute suite bornée (u_n) telle que (Tu_n) converge, on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) convergente.

Démonstration. Le deuxième point implique que la BU de $\ker T$ est compacte!, donc $\ker T$ est de dimension finie. Montrons que pour une constante C

$$\forall u \in E_0 = \ker T^\perp, \quad \|u\| \leq C \|Tu\|. \quad (5.3)$$

Sinon, on aurait une suite $\|u_j\| \geq jTu_j$ (on peut supposer $\|u_j\| = 1$). Donc $Tu_j \rightarrow 0$. Par hyp on extrait une sous-suite convergente $u_{n_k} \rightarrow u$. Par continuité $u \in \ker T$ et d'autre part u doit rester dans E_0 qui est fermé, donc $u = 0$. Impossible car $\|u_{n_k}\| = 1$.

Donc par la proposition "injectif d'image fermée" (2.4), $T(E_0) = T(E)$ est fermé.

Réciproquement si T semi-Fredholm, T_{E_0} est injective d'image fermée, donc (5.3) est vraie. Si (u_n) est bornée et (Tu_n) converge, le projeté orth de (u_n) sur E_0 reste de Cauchy donc converge, tandis que le projeté orth de u_n sur $E_0^\perp = \ker T$ est borné donc relativement compact car dimension finie, donc on peut extraire une sous-suite convergente. \square

5.2 Problèmes de Grushin

On a vu en proposition 5.1 comment **étendre T en une application inversible**. On va systématiser cette astuce. Si $T : E \rightarrow F$ donné, on note **opérateur de**

Grushin l'opérateur étendu à la fois au départ et à l'arrivée :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} T & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : E \times X_- \rightarrow F \times X_+$$

où X_{\pm} sont des Hilbert, $R_+ : E \rightarrow X_+$, $R_- : X_- \rightarrow F$.

Définition 5.7 Lorsque \mathcal{M} est inversible on dit que le problème de Grushin est bien posé.

Si \mathcal{M} est inversible, on notera l'inverse par blocs :

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} S & S_+ \\ S_- & S_0 \end{pmatrix}$$

Lemme 5.8 Si le pb de Grushin est bien posé, les opérateurs

1. R_+, S_- sont surjectifs
2. R_-, S_+ sont injectifs.

Démonstration. En écrivant $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M} = \text{Id}$ dans $E \times X_-$ on trouve $S_-R_- = \text{Id}$ et en écrivant $\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = \text{Id}$ dans $F \times X_+$, on trouve $R_+S_+ = \text{Id}$. \square

Théorème 5.9 1. Soit $T : E \rightarrow F$ Fredholm. Alors il existe des esp de dim finie $X_+ \simeq \ker T$ et $X_- \simeq \text{Coker } T$ et des opérateurs

$$R_- : X_- \rightarrow F, \quad R_+ : E \rightarrow X_+$$

pour lesquels le pb de Grushin est bien posé.

2. Réciproquement, s'il existe X_{\pm}, R_{\pm} tels que le pb de Grushin est bien posé, alors on a l'équivalence :
 - (a) $T : E \rightarrow F$ est Fredholm
 - (b) $S_0 : X_+ \rightarrow X_-$ est Fredholm
 (et dans ce cas $\text{Ind } T = \text{Ind } S_0$)

Évidemment très pratique si R_{\pm} sont de dim finie, car alors l'indice ne dépend pas de S_0 : pas besoin de le calculer !

Corollaire 5.10 $T \in \text{Fred} \iff T^* \in \text{Fred}$ et $\text{Ind } T = -\text{Ind } T^*$

Démonstration. exo \square

Démonstration du théorème. Supposons $T \in \text{Fred}$. Soit G supplémentaire algébrique de $T(E)$ dans F . [Si on veut utiliser la Proposition 5.1, on peut prendre $G = T(E)^{\perp}$. Sinon, la preuve avec G général re-prouve cette proposition.] On pose $X_- = G$ et $X_+ = \ker T$. On définit :

$$R_- : X_- \rightarrow F : x \mapsto x$$

$$R_+ : E \rightarrow X_+ : u \mapsto \Pi_{\ker T} u$$

Si $(u, x_-) \in \ker \mathcal{M}$, $Tu = -R_-x_-$ donc est nul par somme directe. Donc $u \in \ker T = X_+$ et la deuxième ligne donne $R_+u = 0$, donc $u = 0$. L'op de Grushin est donc injectif.

Surjectivité. Soit $(v, x_+) \in F \times X_+$. On décompose $v = Tu_1 + x_-$ et posons $u = u_1 - \Pi_{\ker T} u_1 + x_+$. Le couple (u, x_-) vérifie $Tu + R_-x_- = Tu + x_- = Tu_1 + x_- = v$ (première ligne) tandis que $R_+u = R_+x_+ = x_+$ (deuxième ligne), càd

$$\begin{pmatrix} v \\ x_+ \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} u \\ x_- \end{pmatrix}$$

Preuve du deuxième point. On suppose le pb de Grushin bien posé.

1. Montrons que $S_+ : \ker S_0 \rightarrow \ker T$ est bijectif. On sait par le lemme que S_+ est injectif. Une autre ligne de $\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = \text{Id}$ donne $TS_+ + R_-S_0 = 0$. Donc S_+ envoie $\ker S_0$ dans $\ker T$. Il reste à montrer la surjectivité. Une autre ligne de $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M} = \text{Id}$ donne

$$ST + S_+R_+ = \text{Id}.$$

Donc pour $u \in \ker T$, on obtient $u = S_+R_+u$. Mais on a également

$$S_0R_+ + S_-T = 0 \tag{5.4}$$

donc $S_0R_+u = 0$, *i.e.* $R_+u \in \ker S_0$, donc $u = S_+R_+u \in S_+(\ker S_0)$.

2. Montrons que S_- induit un isomorphisme de $\text{Coker } T \rightarrow \text{Coker } S_0$. On le note

$$\bar{S} : F/T(E) \rightarrow X_-/S_0(X_+).$$

Il faut d'abord montrer que cette application est bien définie. Pour cela, il suffit de montrer que l'application quotientée à l'arrivée : $[S_-] : F \rightarrow X_-/S_0(X_+)$ « passe au quotient » au départ (dans $F/T(E)$), c'est-à-dire ne dépend pas du choix du représentant, càd : $T(E) \subset \ker[S_-]$. Mais si $v = T(u)$ on voit à partir de (5.4) que $S_-(v) \in S_0(X_+)$, ce qui veut dire que $[S_-](v) = [S_-(v)] = 0$. Donc $[S_-]$ définit une unique application sur $F/T(E)$, qu'on note \bar{S} .

On sait déjà que S_- est surjective, donc \bar{S} également. Si $\bar{S}u = 0$, on peut écrire $S_-(u)S_0(x_+)$, et on utilise

$$TS + R_-S_- = \text{Id}$$

ce qui donne $u = TSu + R_-S_0x_+$. En utilisant

$$TS_+ + R_-S_0 = 0,$$

on a $R_-S_0u = -TS_+x_+$ donc

$$u = T(Su - S_+x_+)$$

on a donc bien $u \in T(E)$, ce qui prouve l'injectivité.

3. Les deux isomorphismes prouvent le théorème. □

Voici quelques applications importantes. Mais il y en a bien d'autres (voir l'article Sjöstrand-Zworski http://www.numdam.org/article/AIF_2007__57_7_2095_0.pdf), en particulier pour des opérateurs non auto-adjoints.

Théorème 5.11 $\text{Fred}(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{B}(E, F)$, et l'indice est localement constant (**exercice** : constant sur chaque composante connexe.)

Démonstration. Si $T \in \text{Fred}$, on construit son problème de Grushin \mathcal{M} avec des espace X_{\pm} . En gardant les même espaces on voit que si $\|T' - T\|$ est assez petit, alors $\|\mathcal{M}' - \mathcal{M}\|$ est petit, et donc \mathcal{M}' est inversible car les inversibles de $\mathcal{B}(E \times X_-, F \times X_+)$ forment un ouvert.

Puisque les espaces X_{\pm} sont fixés (et de dimension finie), l'indice $\dim X_+ - \dim X_-$ est constant. \square

Théorème 5.12 — Alternative de Fredholm. Si $K : E \rightarrow E$ est compact, alors $I + K$ est Fredholm d'indice 0.

Donc $\text{Id} + K$ est injectif si et seulement s'il est surjectif! En particulier ça termine la preuve de la Proposition 4.14 sur le spectre d'un opérateur compact.

R Pour $\text{Id} + \epsilon K$ on aurait pu conclure directement pour ϵ assez petit car un inversible est Fredholm d'indice 0. Mais c'est vrai pour ϵ quelconque!

Démonstration du Théorème. Soit (u_n) une suite bornée. On peut extraire u_{n_k} telle que Ku_{n_k} converge. Donc si on suppose en plus que $(\text{Id} + K)(u_n)$ converge, on voit que u_{n_k} elle-même doit converger. Donc par la proposition 5.6, $\text{Id} + K$ est semi-Fredholm.

Puisque l'image est fermée, $\dim \text{Coker}(\text{Id} + K) = \dim(\text{Id} + K)(E)^{\perp} = \ker(\text{Id} + K^*)$. Puisque K^* est compact, cette dimension est finie (voir Proposition 4.14). Donc $\text{Id} + K$ est Fredholm.

Pour conclure il suffit d'appliquer la constance de l'indice sur le chemin $\text{Id} + tK$, $t \in [0, 1]$. \square

Théorème 5.13 — Théorème d'Atkinson. Les opérateurs de Fredholm sont les opérateurs qui sont « inversibles modulo compact » :

1. $T \in \text{Fred}(E, F) \iff \begin{cases} \exists S; & TS - \text{Id} \in \mathcal{K}(F) \\ \exists S'; & S'T - \text{Id} \in \mathcal{K}(E) \end{cases}$
2. $T \in \text{Fred}$ d'indice zéro $\iff \exists K \in \mathcal{K}$ tq $T + K$ est inversible.

Démonstration. 1 : Si T est Fredholm, on écrit le pb de Grushin canoniquement associé, il est inversible, et on en tire $TS + R_-S_- = \text{Id}$, soit $TS = \text{Id} - R_-S_-$, et ce dernier (S_-) est de rang fini donc compact. De même on a $ST + S_+R_+ = \text{Id}$ et R_+ est de rang fini. (remarque : $S = S'$)

Réciproquement, si $S'T = \text{Id} + K$ alors $\ker T \subset \ker S'T = \ker(\text{Id} + K)$ de dimension finie par Prop 4.14. De même si $TS = \text{Id} + K$ alors $\text{ran } TS \subset \text{ran } T$ donc $\dim \text{Coker } T \leq \dim \text{Coker } TS$ qui est fini. Donc T est Fredholm.

2 : Soit $\tilde{K} : \ker T \rightarrow T(E)^{\perp}$ un isomorphisme (existe car indice zéro); on l'étend par 0 sur $(\ker T)^0$ pour obtenir $K : E \rightarrow F$ de rang fini. T induit un isomorphisme entre $(\ker T)^{\perp}$ et $T(E)$, donc clairement $T + K$ est bijectif $E \rightarrow F$. (le voir par blocs)

Réciproquement, si $S = T + K$ est inversible, $T = S(\text{Id} - S^{-1}K)$ et $S^{-1}K$ est compact, donc $\text{Id} - S^{-1}K$ est Fredholm. En composant par un inversible, ça reste Fredholm. \square

R On voit dans la preuve qu'on peut remplacer dans le théorème d'Atkinson « compact » par « de rang fini ».

Corollaire 5.14 Si $T \in \text{Fred}$ et $K \in \mathcal{K}$ alors $T + K \in \text{Fred}$ de même indice.

Démonstration. On écrit $S'T - \text{Id} \in \mathcal{K}$ et $TS - \text{Id} \in \mathcal{K}$ donc

$$S'(T + K) - \text{Id} = (S'T - \text{Id}) + S'K \in \mathcal{K}$$

et

$$(T + K)S - \text{Id} = (TS - \text{Id}) + KS \in \mathcal{K}$$

on applique donc la caractérisation du théorème. L'indice est constant par le chemin $T + tK$. \square

Exercice 5.15 Si T_1, T_2 sont Fredholm, alors T_1T_2 aussi et $\text{Ind}(T_1T_2) = \text{Ind} T_1 + \text{Ind} T_2$. \blacksquare

5.3 Théorie de Fredholm analytique

Intégration dans un Banach.

L'intégration des fonctions continues à valeurs dans un Banach, grâce aux sommes de Riemann (« méthode des rectangles »), fonctionne comme pour le cas standard des fonctions réelles. Soit \mathcal{B} un Banach (typiquement ça sera $\mathcal{B}(E, F)$) et $f : I \rightarrow \mathcal{B}$ continue, $I = [a, b]$ intervalle de \mathbb{R} .

Définition 5.16

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

En effet, si on considère la fonction continue positive $x \mapsto \|f(x)\|$, la somme converge par la méthode des rectangles usuelle, et puisque \mathcal{B} est un Banach la somme initiale converge aussi.

Intégrale de chemin.

Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est C^1 (par morceaux), et $\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$ est une forme différentielle sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathcal{B} , on note

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_0^1 \gamma^*(\alpha) = \int_0^1 \alpha(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt = \int_0^1 \left(\left(\frac{d\gamma_1}{dt} \right) \alpha_1(\gamma(t)) + \left(\frac{d\gamma_2}{dt} \right) \alpha_2(\gamma(t)) \right) dt.$$

Fonctions holomorphes à valeurs dans un Banach.

On pourrait tout définir par convergence faible en se ramenant aux fonctions holomorphes habituelles dans \mathbb{C} . Essayons plutôt de le faire (un peu) « intrinsèquement ». Évidemment on ne fait pas toutes les preuves. On pourra se remémorer la théorie habituelle avec par exemple [1].

Définition 5.17 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathcal{B}$. On dit que f est **holomorphe** en $z_0 \in U$ (ou « fortement holomorphe ») si f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 , i.e. la limite suivante existe : (notée $f'(z_0)$)

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Proposition 5.18 Si f est holomorphe en z_0 alors elle est continue en z_0 .

Démonstration. $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h) = f(z_0) + \mathcal{O}(h)$. □

Proposition 5.19 Si f est holomorphe sur U alors les dérivées partielles de f sont continues et la forme différentielle $f(z)dz$ est fermée sur U .

La première assertion n'est pas immédiate. La deuxième dit que $f(z)dx + if(z)dy$ est fermée, soit

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$$

(Cauchy-Riemann). On l'obtient directement à partir de la définition.

Corollaire 5.20 Si f est holomorphe dans U . Pour tout courbe γ bordant un domaine homotope à un disque dans U ,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

L'assertion reste vraie si f est continue sur U et holomorphe sur U privé d'un nombre fini de points.

Il s'agit en fait d'un cas particulier du très important **Théorème de Stokes** pour une k -forme α de classe C^1 , et un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^{k+1}$ à bord régulier $\partial\Omega$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_{\Omega} d\alpha.$$

Voir par exemple [5]. Attention ici l'opérateur de bord ∂ n'est pas seulement topologique, il doit être pris au sens algébrique, avec *orientation*. Par exemple si $\Omega = [a, b]$, alors $\partial\Omega$ est la différence formelle « $\{b\} - \{a\}$ ». Pour le cas particulier qui nous intéresse, avec $k = 1$, $\alpha = f(z)ds = f(z)(dx + idy)$, une preuve directe est donnée dans [1]. (La proposition dit que $d\alpha = 0$ si f holomorphe.)

Pour traiter le cas d'un nombre fini de points de dis-holomorphie, on peut découper le domaine encerclé par γ en sous-domaines D_j à l'intérieur desquels f est holomorphe ; pour tout γ_j comme dans l'énoncé, tracé dans D_j , $\int_{\gamma_j} f(z)dz = 0$. Par continuité de f , on peut faire tendre γ_j vers le bord orienté de D_j . Puis on écrit $\int_{\gamma} = \sum \int_{\gamma_j}$.

On en déduit la fameuse **formule de Cauchy** :

Proposition 5.21 Si f est holomorphe sur U , pour tout disque $\overline{D} \subset U$ et $a \in D$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{z - a} = f(a) \tag{5.5}$$

où ∂D est le bord orienté dans le sens trigo.

Démonstration. Considérer la fonction $h(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, si f est holomorphe, h se prolonge par continuité en $z = a$. Donc $\int_{\partial D} h(z)dz = 0$ par Stokes (corollaire 5.20). D'autre part, un calcul direct montre que, si $\tilde{D} = B(a, r)$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}} \frac{dz}{z-a} = 1.$$

(Écrire $z = a + re^{i\theta}$, donc le long que ∂D on a (r est fixé), $dz = ire^{i\theta} d\theta$ et l'intégrale devient $\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 1$). D'autre part $\frac{1}{z-a}$ est holomorphe sur $D \setminus \tilde{D}$ donc son intégrale sur le bord de $D \setminus \tilde{D}$ est nulle, donc $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}} \frac{dz}{z-a} = 1$. \square

En développant sous l'intégrale, on obtient

Corollaire 5.22 Si f est holomorphe sur U , alors elle y est analytique, càd développable en série entière au voisinage de chaque point : pour tout disque ouvert $D = B(z_0, r) \subset U$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n |z - z_0|^n \quad \forall z \in D$$

de rayon de convergence $R \geq r$. Les coefficients sont

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Démonstration. On peut supposer $z_0 = 0 \in U$. Pour $a \in D$ et $z \in \partial D$, on développe $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-z^{-1}a} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} (z^{-1}a)^n$. En effet on a $|a| < |z| = r$ donc $|z^{-1}a| < 1$ donc la série est normalement convergente; en appliquant la formule de Cauchy (5.5) on obtient

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \left(\int_{\partial D} f(z) z^{-n-1} dz \right) a^n,$$

ce qui (par définition) montre que f est analytique dans D . \square

Par les théorème standard de dérivations sous une série normalement convergente, on voit qu'une fonction analytique est en particulier de classe C^∞ , que ce soit au sens réel ou holomorphe. On obtient donc :

Théorème 5.23 — Théorème de Morera. Soit $f : U \rightarrow \mathcal{B}$ continue. On suppose que pour tout disque fermé $\bar{D} \subset U$, f vérifie la formule de Cauchy : $\forall a \in D$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{z-a}$$

alors f est holomorphe sur U .

Démonstration. Puisque f est continue, l'intégrale est bien définie, et on peut appliquer la preuve du corollaire ci-dessus pour intervertir sommation et intégrale. On en déduit que f est analytique sur U , donc holomorphe. \square

Dans le cadre banachique, on a une notion naturelle d'« holomorphie faible ».

Définition 5.24 On dit que $f : U \rightarrow \mathcal{B}$ est **faiblement holomorphe** si $\ell \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe pour tous $\ell \in \mathcal{B}'$ (le dual topologique de \mathcal{B}).

Le très joli résultat suivant montre que cette notion n'est pas différente de l'holomorphie forte!

Théorème 5.25 f est holomorphe si et seulement si elle est faiblement holomorphe.

On va utiliser deux lemmes :

Lemme 5.26 Dans un Banach \mathcal{B} , une partie $A \subset \mathcal{B}$ est bornée si et seulement si elle est faiblement bornée (càd $\ell(A)$ est bornée dans \mathbb{C} pour tous $\ell \in \mathcal{B}'$).

Démonstration. borné \Rightarrow faiblement borné par la continuité de chaque ℓ . Réciproquement, chaque $x \in A$ est vu comme une forme linéaire continue \tilde{x} sur \mathcal{B}' par

$$\tilde{x} : \ell \mapsto \ell(x).$$

Si A est faiblement bornée, la famille de formes linéaires $\{\tilde{x}; x \in A\}$ est ponctuellement bornée, donc uniformément aussi par Banach-Steinhaus : il existe $C > 0$ tq $\|\tilde{x}\| \leq C, \forall x \in A$. Or $\|\tilde{x}\| = \sup |\ell(x)| / \|\ell\| = \|x\|$ par Hahn-Banach. Donc A est bornée par C . \square

Lemme 5.27 faiblement holomorphe \Rightarrow continu.

Démonstration. Pour chaque $z_0 \in U$, Appliquer le Lemme 5.26 à

$$A = \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}; \quad z \in B(z_0, \epsilon) \right\}$$

\square

Démonstration du Théorème. Un sens est immédiat. Pour l'autre, supposons f faiblement holomorphe. Pour chaque $\ell \in \mathcal{B}'$, $\ell \circ f$ vérifie la formule de Cauchy. Par linéarité et continuité de ℓ on a

$$\int_{\partial D} \frac{\ell(f(z))dz}{z - a} = \ell \left(\int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{z - a} \right)$$

(revenir à la somme de Riemann), donc f vérifie la formule de Cauchy. Puisqu'elle est continue, par le théorème de Morera, elle est holomorphe. \square

Fonctions méromorphes.

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Une fonction $f : U \rightarrow \mathcal{B}$ est **méromorphe** si elle est holomorphe (analytique) sur U privé d'un ensemble de point **isolés**, dont chacun est un **pôle** pour f .

On dit que z_0 est un **pôle** pour f si $(z - z_0)^k f(z)$ admet une limite non nulle dans \mathcal{B} quand $z \rightarrow z_0$, pour un entier $k \geq 1$, mais pas pour $k - 1$.

Fredholm analytique.

Théorème 5.28 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $(T(z))_{z \in U}$ une famille holomorphe d'opérateurs de Fredholm : la fonction

$$T : \begin{cases} U \rightarrow \mathcal{B}(E, F) \\ z \mapsto T(z) \end{cases}$$

est holomorphe, et $T(U) \subset \text{Fred}(E, F)$. On suppose que $T(z_0)$ est inversible pour un $z_0 \in U$. Alors la fonction

$$z \mapsto (T(z))^{-1}$$

est méromorphe sur U .

Démonstration. On fixe $a \in U$ et on construit le problème de Grushin « canonique » de $T(a) : \begin{pmatrix} T(a) & R_-(a) \\ R_+(a) & 0 \end{pmatrix}$. Pour $z \in V$ proche de a , le problème reste bien posé si on remplace uniquement $T(a)$ par $T(z)$ (on ne touche pas aux R_{\pm}). Notons $\begin{pmatrix} S & S_+ \\ S_- & S_0 \end{pmatrix}(z)$ son inverse.

$T(z)$ est inversible ssi ($\ker T(z) = 0$ et $\text{Ind } T = 0$). Par la preuve du Théorème de Grushin, c'est équivalent à ($\ker S_0(z) = 0$ et $\text{Ind } S_0 = 0$). Puisque X_{\pm} sont de dimension finies, c'est équivalent à $\dim X_+ = \dim X_-$ et $\det S_0(z) \neq 0$.

Puisque $z \mapsto \mathcal{M}(z)$ est holomorphe et à valeur dans les opérateurs bornés inversibles, son inverse $z \mapsto \mathcal{M}^{-1}(z)$ reste holomorphe (la dérivée se calcule directement via la dérivée de \mathcal{M}). Puisque les espaces X_{\pm} ne dépendent pas de z , le bloc $S_0(z)$ est holomorphe. (Appliquer le projecteur sur X_{\pm} , qui est un opérateur borné, préserve l'holomorphie.) Donc $h(z) := \det S_0(z)$ est holomorphe sur V . $h(z) = 0 \iff T(z)$ n'est pas inversible.

Montrons que h n'est pas identiquement nulle. Pour ce faire, on globalise : On recouvre U par des boules V_{α} où la construction précédente est faisable. On obtient $h_{\alpha} \in \text{Hol}(V_{\alpha}; \mathbb{C})$. Si h_{α} est identiquement nulle, alors $T(z)$ n'est pas inversible pour tout $z \in V_{\alpha}$. Donc pour tout autre ouvert V_{β} qui intersecte V_{α} , h_{β} doit être nulle sur l'intersection $V_{\alpha} \cap V_{\beta}$, et donc sur tout V_{β} par le principe des zéros isolés. (continuation analytique). Par connexité de U (à détailler ?), on obtiendrait que T n'est jamais inversible, ce qui contredit l'hypothèse en z_0 .

La fonction h s'annule donc au plus en un ensemble de points isolés, et son inverse est méromorphe sur V . Il reste à en déduire que $T(z)^{-1}$ est méromorphe.

Lemme 5.29 Pour $z \in V$, si $h(z) \neq 0$ alors

$$T(z)^{-1} = S(z) - S_+(z)S_0(z)^{-1}S_-(z)$$

Démonstration. On a $TS + R_-S_- = \text{Id}$ donc

$$T(S - S_+S_0^{-1}S_-) = TS - TS_+S_0^{-1}S_- = \text{Id} - R_-S_- - TS_+S_0^{-1}S_-.$$

On sait aussi que $TS_+ + R_-S_0 = 0$ donc $TS_+S_0^{-1} = -R_-$. Donc

$$-R_-S_- - TS_+S_0^{-1}S_- = 0.$$

Ça donne bien $T(S - S_+ S_0^{-1} S_-) = \text{Id}$. Puisque T est inversible, on a le résultat. \square

On déduit du lemme que T^{-1} est méromorphe sur V (en multipliant par z^k on voit que chaque pôle de S_0 donne lieu à un pôle (éventuellement trivial) de T). Puisque a était arbitraire, on en conclut que T est méromorphe sur U entier. \square

5.4 Spectre d'un opérateur compact – suite

On peut préciser la Proposition 4.14. Soit $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur compact. La famille $(K - z\text{Id})_{z \in \mathbb{C}^*}$ est holomorphe, à valeurs dans Fred. Donc par la théorie analytique de Fredholm (théorème 5.28), $(K - z\text{Id})^{-1}$ est méromorphe : il existe un ensemble discret de pôles dans \mathbb{C}^* pour lesquels $K - z\text{Id}$ n'est pas inversible. Conclusion :

Proposition 5.30 *Le spectre d'un opérateur compact est constitué*

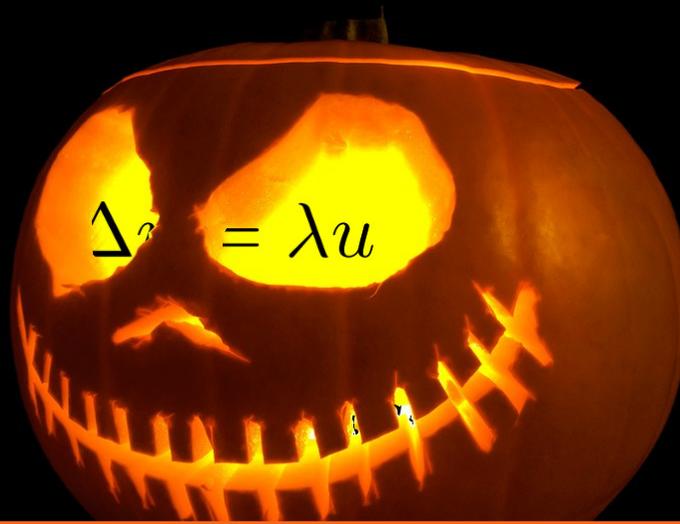
1. de 0 (si la dimension de \mathcal{H} n'est pas finie)
2. et d'un ensemble **discret dans** \mathbb{C}^* de valeurs propres de multiplicités finies.

Attention, « discret dans \mathbb{C}^* » autorise une accumulation en 0.

Exercice 5.31 Si K est compact, on a l'alternative :

1. Soit $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini (voire vide)
2. Soit $\sigma(K) \setminus \{0\}$ consiste en une suite de valeurs propres λ_n qui tend vers 0. ■





6. Spectre et Résolvante

Révisions préalables : réduction des endomorphismes

6.1 Définitions

Définition 6.1 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur à domaine sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} . L'**ensemble résolvant** est le complémentaire du spectre dans \mathbb{C} :

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A).$$

Autrement dit $\lambda \in \rho(A)$ ssi $(A - \lambda \text{Id}) : \text{Dom}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est inversible d'inverse borné.
Rappel : ça veut dire que

$$(A - \lambda \text{Id})(A - \lambda \text{Id})^{-1} = \text{Id} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

et

$$(A - \lambda \text{Id})^{-1}(A - \lambda \text{Id}) = \text{Id} : \text{Dom}(A) \rightarrow \text{Dom}(A).$$

Rappel : si A est **borné**, alors $\lambda \in \rho(A) \iff (A - \lambda \text{Id})$ bijectif : $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tandis que si A est **fermé**, alors $\lambda \in \rho(A) \iff (A - \lambda \text{Id})$ bijectif : $\text{Dom}(A) \rightarrow \mathcal{H}$.

On ne considérera que des opérateurs fermés. (attention, en pratique il faudra calculer la fermeture).

Définition 6.2 Si $\lambda \in \rho(A)$, on note $R_A(\lambda) = (A - \lambda \text{Id})^{-1}$ l'**opérateur résolvant** (ou simplement **la résolvante**) de A .

J'insiste : la résolvante est toujours un opérateur borné : $R_A(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, et son image est $\text{Dom}(A)$. Attention, la résolvante n'est en général pas inversible! (sinon A serait borné).

Exercice 6.3 Sur $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ avec base Hilbertienne canonique (e_n) , on définit $A : e_n \mapsto \frac{e_n}{n}$. Montrer que ça définit un opérateur borné A , que $0 \in \sigma(A)$, mais n'est pas une valeur propre. Montrer qu'il existe un opérateur $(B, \text{Dom}(B))$ à domaine dense qui « inverse » $A : BA = \text{Id}$ sur \mathcal{H} et $AB = \text{Id}$ sur $\text{Dom}(B)$. En particulier $0 \notin \sigma(B)$. Noter aussi que A est la résolvante de $B : A = R_B(0)$ mais B n'est pas la résolvante de A ! (qui n'existe pas en 0). ■

6.2 Identités de la résolvante

Proposition 6.4 Lorsque les résolvantes sont définies, on a

$$(R1) \quad \lambda R_A(\lambda) + \text{Id} = AR_A(\lambda)$$

$$(R2) \quad R_A(\lambda)R_A(\mu) = R_A(\mu)R_A(\lambda)$$

$$(R3) \quad R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu)$$

$$(R4) \quad R_B(\lambda) - R_A(\lambda) = R_A(\lambda)(A - B)R_B(\lambda) \text{ si } \text{Dom}(B) \subset \text{Dom}(A).$$

Démonstration. (R1) est la définition. (R2) découle de (R3). Pour montrer (R3), on écrit (noter que les compositions sont licites)

$$R_A(\lambda) = R_A(\lambda)(A - \mu \text{Id})R_A(\mu) = R_A(\lambda)AR_A(\mu) - \mu R_A(\lambda)R_A(\mu)$$

et

$$R_A(\mu) = R_A(\lambda)(A - \lambda \text{Id})R_A(\mu) = R_A(\lambda)AR_A(\mu) - \lambda R_A(\lambda)R_A(\mu)$$

ce qui donne le résultat.

Pour (R4), on note que la composition $(A - B)R_B(\lambda)$ est bien définie, et on écrit

$$(A - B)R_B(\lambda) = (A - \lambda \text{Id} + \lambda \text{Id} - B)R_B(\lambda) = (A - \lambda \text{Id})R_B - \text{Id}.$$

On conclut en composant par $R_A(\lambda)$. □

Théorème 6.5 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur sur \mathcal{H} . Alors

1. $\rho(A)$ est ouvert dans \mathbb{C} (i.e. $\sigma(A)$ est fermé)
2. $z \mapsto R_A(z)$ est holomorphe sur $\rho(A)$ (à valeurs dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$)
3. $\frac{d}{dz} R_A(z) = R_A(z)^2$.

Démonstration. On a déjà démontré le point 1 (Proposition 2.49). Prenons maintenant $z_0 \in \rho(A)$. On écrit

$$A - z \text{Id} = (A - z_0 \text{Id})(\text{Id} - (z - z_0)R_A(z_0))$$

Le membre de droite est inversible sur $\text{Dom}(A)$ si $|z - z_0| \|R_A(z_0)\| < 1$ (c'était le même argument utilisé pour la proposition) et en plus on voit que ça donne un développement en séries entières. Explicitement :

$$R_A(z) = \left(\sum_{k \geq 0} (z - z_0)^k (R_A(z_0))^k \right) R_A(z_0) = \sum_{k \geq 0} (z - z_0)^k (R_A(z_0))^{k+1}.$$

Pour le point 3, on utilise l'identité de résolvante (R3) :

$$\frac{R_A(z+h) - R_A(z)}{h} = R_A(z+h)R_A(z)$$

Puisqu'on sait que $R_A(z)$ est dérivable, on peut passer à la limite $h \rightarrow 0$. □

6.3 Sous-espaces caractéristiques, spectre discret

Soit A un opérateur borné. Si λ est une valeur propre de A , on a la suite croissante :

$$\{0\} \neq \ker(A - \lambda \text{Id}) \subset \ker(A - \lambda \text{Id})^2 \subset \ker(A - \lambda \text{Id})^3 \subset \dots$$

Posons $B = A - \lambda \text{Id}$. La suite est stationnaire si et seulement s'il existe N tel que $\ker B^{N+1} = \ker B^N$ (en effet dans ce cas on voit que $\ker B^{N+2} \subset \ker B^{N+1}$ (donc égal)...))

Définition 6.6 Dans ce cas, $\ker(A - \lambda \text{Id})^N$ est appelé sous-espace caractéristique et sa dimension est la **multiplicité algébrique** de λ .

Exercice 6.7 (cf la dimension finie!) On note $B = A - \lambda \text{Id}$. Soit N le plus petit entier tel que $\ker B^N = \ker B^{N+1}$ (on suppose qu'il existe). On choisit $u \in \ker B^N \setminus \ker B^{N-1}$. Montrer que la famille

$$(u, Bu, B^2u, \dots, B^{N-1}u)$$

est libre (dans le sous-espace caractéristique). Donc la multiplicité algébrique est $\geq N$. ■

Définition 6.8 Soit A un opérateur borné. On dit que $\lambda \in \sigma(A)$ appartient au **spectre discret** $\sigma_d(A)$ de A si :

1. λ est isolée dans le spectre ;
2. λ est une valeur propre de multiplicité algébrique finie.

Le complémentaire du spectre discret (dans le spectre) s'appelle le **spectre essentiel** $\sigma_e(A)$:

$$\sigma(A) = \sigma_d(A) \bigsqcup \sigma_e(A)$$

■ **Exemple 6.9** Le « décalage à gauche » dans $\ell^2(\mathbb{N})$ a un noyau de dimension 1. $S(e_1) = 0$. Mais $\forall n, S^n(e_n) = 0$ donc la multiplicité algébrique est infinie, donc $0 \in \sigma_e(S)$. ■

Dans le cas non borné, la notion de sous-espace caractéristique n'est plus pertinente. On va généraliser la notion de sous-espaces stables.

6.4 Commutation avec un opérateur borné

Définition 6.10 On dit qu'un opérateur fermé $(A, \text{Dom}(A))$ commute avec un opérateur borné $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si

$$PA \subset AP$$

« pas cap' » !

On a noté AP l'opérateur de domaine $\{u; Pu \in \text{Dom}(A)\}$. Autrement dit on demande $\forall u \in \text{Dom}(A), Pu \in \text{Dom}(A)$ et $PAu = APu$.

Si A commute avec P , on peut définir la restriction de A sur l'image de P comme un opérateur à domaine $\text{Dom}(A) \cap P(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$.

Exercice 6.11 Si A commute avec P et $\text{Dom}(A)$ est dense dans \mathcal{H} , alors $\text{Dom}(A) \cap P(\mathcal{H})$ est dense dans $P(\mathcal{H})$. ■

Exercice 6.12 Si A est borné, A commute avec P ssi $PA = AP$. ■

Grâce à la résolvante on se ramène aux opérateurs bornés :

Théorème 6.13 Si $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A commute avec un opérateur borné P si et seulement si il existe $z \in \rho(A)$ tel quel

$$R_A(z)P = PR_A(z)$$

Démonstration. Exercice. □

En particulier, A commute toujours avec sa résolvante $R_A(z)$.

6.5 Projecteurs spectraux (de Riesz)

Pour un opérateur fermé général A , on a un analogue des sous-espaces caractéristiques en présence d'un élément *isolé* du spectre.

Soit $\lambda \in \sigma(A)$, isolé : il existe un voisinage U de λ dans \mathbb{C} tel que $\sigma(A) \cap U = \{\lambda\}$.

Soit Γ_λ un chemin fermé simple tracé dans U qui entoure λ dans le sens trigonométrique.

Puisque la résolvante $R_A(z)$ est analytique dans $U \setminus \{\lambda\}$, elle y est continue et on peut définir l'intégrale :

$$P_\lambda := \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} R_A(z) dz.$$

R Si $R_A(z)$ est méromorphe avec pôle en λ , alors $-P_\lambda$ est le *résidu* de R_A en λ .

R Par holomorphie, on voit que la définition ne dépend pas du choix du chemin. (Considérer le « tube » borné par les deux chemins et appliquer Stokes.)

Théorème 6.14 On suppose toujours que A est fermé. Alors P_λ est un projecteur (il est continu et $P_\lambda^2 = P_\lambda$) qui commute avec A . Son image $P_\lambda(\mathcal{H})$ est un sous-espace fermé, contenu dans $\text{Dom}(A)$, appelé **sous-espace spectral** associé à λ . La restriction de A à l'espace de Hilbert $P_\lambda(\mathcal{H})$ est un opérateur borné.

Le sous-espace spectral contient $\ker(A - \lambda \text{Id})$, et si A est borné, il contient tous les $\ker(A - \lambda)^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Puisque R_A est continue sur le compact Γ_λ , à valeurs dans les opérateurs bornés, l'intégrale est encore un opérateur borné. Par holomorphie, on

peut choisir deux chemins $\Gamma_1 = \Gamma_\lambda$, Γ_2 proches, et on a

$$P_\lambda = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} R_A(z) dz = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2} R_A(z) dz.$$

On a donc par Fubini

$$P_\lambda^2 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{z \in \Gamma_1} \int_{w \in \Gamma_2} R_A(z) R_A(w) dw dz$$

et on utilise l'identité de la résolvante (R3) : $R_A(z)R_A(w) = \frac{R_A(z) - R_A(w)}{z - w}$ ce qui donne

$$P_\lambda^2 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{z \in \Gamma_1} \int_{w \in \Gamma_2} R_A(z) \frac{dw dz}{z - w} + \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{z \in \Gamma_1} \int_{w \in \Gamma_2} R_A(w) \frac{dw dz}{z - w}.$$

[faire un dessin] Prenons le rayon de Γ_2 légèrement plus grand que celui de Γ_1 . (On peut supposer que Γ_1, Γ_2 sont des cercles.) Dans ce cas, quand w est fixé et z tourne sur Γ_1 , il ne tourne pas autour de w , donc $\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z - w} = 0$ (autrement dit $z \mapsto \frac{1}{z - w}$ est holomorphe à l'intérieur du disque bordé par Γ_1). Par contre si z est fixé et w tourne sur Γ_2 , alors il fait un tour simple autour de z , donc

$$\int_{w \in \Gamma_2} \frac{dw}{z - w} = -2i\pi.$$

On trouve donc

$$P_\lambda^2 = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} R_A(z) dz + 0 = P_\lambda.$$

C'est donc bien un projecteur.

L'image de tout projecteur (continu) est fermée : c'est le noyau de $(P_\lambda - \text{Id})$.

Montrons la commutation. Pour $u \in \text{Dom}(A)$, $v := P_\lambda u$ est une limite de sommes de Riemann v_n d'éléments de la forme $R_A(z_j)u \in \text{Dom}(A)$. D'autre part Av_n se calcule par une somme finie de $AR_A(z_j)u = R_A(z_j)Au$ (A commute avec $R_A(z_j)$) donc la sommation de Riemann donne exactement $P_\lambda(Au)$. Or, A est fermé, donc nécessairement $v \in \text{Dom}(A)$ et $Av = P_\lambda Au$, ce qui prouve $P_\lambda A \subset AP_\lambda$.

Plus précisément, puisque $AR_A(z_j)u = z_j R_A(z_j)u + u$ (identité (R1)), la somme de Riemann précédente donne

$$Av = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} z R_A(z) u dz + 0.$$

Par continuité de R_A on voit que $\|AP_\lambda u\| \leq C \|u\|$, donc AP_λ s'étend en un opérateur borné. Montrons qu'en fait $P_\lambda(\mathcal{H}) \subset \text{Dom}(A)$ (donc pas besoin d'étendre). Soit $u \in P_\lambda(\mathcal{H})$; puisque $\text{Dom}(A) \cap P_\lambda(\mathcal{H})$ est dense dans $P_\lambda(\mathcal{H})$ (voir exercice 6.11), soit $u_n \rightarrow u$, $u_n \in \text{Dom}(A) \cap P_\lambda(\mathcal{H})$. On a $u_n = P_\lambda u_n$ donc $Au_n = AP_\lambda u_n$, et comme AP_λ est borné, ça converge. Puisque A est fermé, on en déduit que $u \in \text{Dom}(A)$.

Donc pour tout $u \in P_\lambda(\mathcal{H})$, $\|Au\| = \|AP_\lambda u\| \leq C \|u\|$: la restriction de A au sous-espace spectral est bornée.

Il reste à montrer que le sous-espace spectral contient le sous-espace propre. Si $Au = \lambda u$, alors $((A - z) + (z - \lambda))u = 0$ et donc en composant par $R_A(z)/(z - \lambda)$,

$$\frac{u}{z - \lambda} + R_A(z)u = 0$$

pour tous $z \in \Gamma_\lambda$, donc en intégrant :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{u}{z - \lambda} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} R_A(z) dz = 0$$

ce qui donne

$$u - P_\lambda u = 0,$$

soit $u \in P_\lambda(\mathcal{H})$. Enfin, si A est borné et $(A - \lambda \text{Id})^N u = 0$ alors $(A - \lambda \text{Id})^{N-1} v = 0$ avec $v = Au - \lambda u$. Supposons par récurrence que $\ker(A - \lambda \text{Id})^{N-1} \subset P_\lambda(\mathcal{H})$; alors $v \in P_\lambda(\mathcal{H})$, soit $P_\lambda v = v$, ce qui donne, en utilisant $P_\lambda Au = AP_\lambda u$,

$$A(P_\lambda u - u) = \lambda(P_\lambda u - u),$$

donc $(P_\lambda u - u) \in \ker(A - \lambda \text{Id})$ et donc par récurrence appartient à $P_\lambda(\mathcal{H})$, ce qui implique que $u \in P_\lambda(\mathcal{H})$. \square

R Au lieu d'utiliser les sommes de Riemann, on peut passer par la caractérisation de la commutativité par les résolvantes (P_λ commute clairement avec la résolvante), et utiliser l'identité de la résolvante.

Théorème 6.15 — suite. Avec les notations du Théorème précédent, le spectre de la restriction de A à $P_\lambda(\mathcal{H})$ est $\{\lambda\}$.

Corollaire 6.16 Si P_λ est de rang fini alors λ est une valeur propre.

Démonstration du corollaire. La restriction de A à $P_\lambda(\mathcal{H})$ est une matrice de spectre $\{\lambda\}$, donc λ est une valeur propre : il existe un vecteur propre non nul dans $P_\lambda(\mathcal{H})$: c'est aussi un vecteur propre pour A . \square

Démonstration du théorème. Soit $\tilde{A} = A|_{P_\lambda(\mathcal{H})}$. Si $A - z\text{Id}$ est inversible, alors la restriction de $R_A(z)$ à $P_\lambda(\mathcal{H})$ est bien définie (car la résolvante commute avec P_λ) et est un inverse de $\tilde{A} - z\text{Id}$. Donc $\rho(A) \subset \rho(\tilde{A})$.

En utilisant l'identité de la résolvante comme précédemment on calcule

$$R(z)P_\lambda = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{R_A(z) - R_A(w)}{z - w} dw =$$

Donc si $z \in U$ est à l'extérieur du disque D_λ bordé par Γ_λ , $\int_{\Gamma_\lambda} \frac{dw}{z-w} = 0$, donc

$$R(z)P_\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{R_A(w)}{z - w} dw.$$

On voit donc que $R(z)P_\lambda$ s'étend en une fonction holomorphe $\tilde{R}(z)$ à l'extérieur de ce disque (*i.e* dans $\mathbb{C} \setminus \overline{D_\lambda}$). Lorsque $z \in U$, et $u \in P_\lambda(\mathcal{H})$, $\tilde{R}(z)(\tilde{A} - z\text{Id})u = R(z)P(A - z\text{Id})u = R(z)(A - z\text{Id})u = u$. (Je note $P = P_\lambda$). Les deux membres sont analytiques (à valeurs dans \mathcal{H}), donc par unique continuation, $\tilde{R}(z)$ est un inverse de $(\tilde{A} - z\text{Id})$ pour tous $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_\lambda}$. Donc $\rho(\tilde{A})$ contient $\mathbb{C} \setminus \overline{D_\lambda}$. Puisque $\overline{D_\lambda} \setminus \{\lambda\} \subset \rho(A) \subset \rho(\tilde{A})$, on obtient

$$\mathbb{C} \setminus \{\lambda\} \subset \rho(\tilde{A}).$$

Il reste à montrer que $\lambda \in \sigma(\tilde{A})$. Pour cela, on considère la décomposition topologique

$$\mathcal{H} = P(\mathcal{H}) \oplus (\text{Id} - P)(\mathcal{H})$$

(remarque : $(\text{Id} - P)(\mathcal{H}) = \ker P$) et on répète l'argument avec le projecteur complémentaire $P - \text{Id}$: si z est à l'intérieur du disque D_λ , on a $\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{dw}{z-w} = -1$ donc

$$R(z)(P - \text{Id}) = R(z)P - R(z) \quad (6.1)$$

$$= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{R_A(z) - R_A(w)}{z-w} dw + \frac{1}{2i\pi} R(z) \int_{\Gamma_\lambda} \frac{dw}{z-w} \quad (6.2)$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{R(w)}{z-w} dw \quad (6.3)$$

qui est bien holomorphe pour tout $z \in D_\lambda$. Donc le spectre de $A_{|(P-\text{Id})(\mathcal{H})}$ est situé à l'extérieur du disque. Donc, en supposant que $\lambda \notin \sigma(\tilde{A})$, les deux restrictions $(A - \lambda\text{Id})P$ et $(A - \lambda\text{Id})(P - \text{Id})$ seraient inversibles, ce qui impliquerait $A - \lambda$ inversible (d'inverse la somme directe des inverses) : contradiction. \square

Définition 6.17 Sous les hypothèses précédentes, le rang du projecteur P_λ (éventuellement infini) s'appelle la **multiplicité algébrique** de λ .

Définition 6.18 Soit $\lambda \in \sigma(A)$. On dit que $\lambda \in \sigma_d(A)$ (**spectre discret**) si λ est isolée dans $\sigma(A)$ et le rang de P_λ est fini.

Définition 6.19 Le **spectre essentiel** $\sigma_e(A)$ est le complémentaire de $\sigma_d(A)$ dans $\sigma(A)$.

■ **Exemple 6.20** Le spectre du laplacien sur \mathbb{R}^n est purement essentiel $\sigma(-\Delta) = \sigma_e(-\Delta) = [0, \infty[$.

Le spectre du Laplacien de Beltrami sur une variété compacte est purement discret. Idem pour le Laplacien de Dirichlet sur un ouvert régulier borné. (Exercice : faire le cas $[0, 1]$.)

Avec des opérateurs de Schrödinger $P = -\Delta + V$ on peut facilement obtenir un spectre mixte. ■

6.6 Opérateurs à résolvante compacte

Soit A un opérateur fermé et on suppose qu'il existe $z_0 \in \rho(A)$ avec $R_A(z_0)$ compact. Par l'identité de la résolvante (R3),

$$R_A(z) = R_A(z_0)(\text{Id} + (z - z_0)R_A(z))$$

donc tout $R_A(z)$ est encore compact. On dit que A est à **résolvante compacte**.

Théorème 6.21 Si A est à résolvante compacte, alors son spectre est discret : $\sigma(A) = \sigma_d(A)$.

Autrement dit le spectre est constitué de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

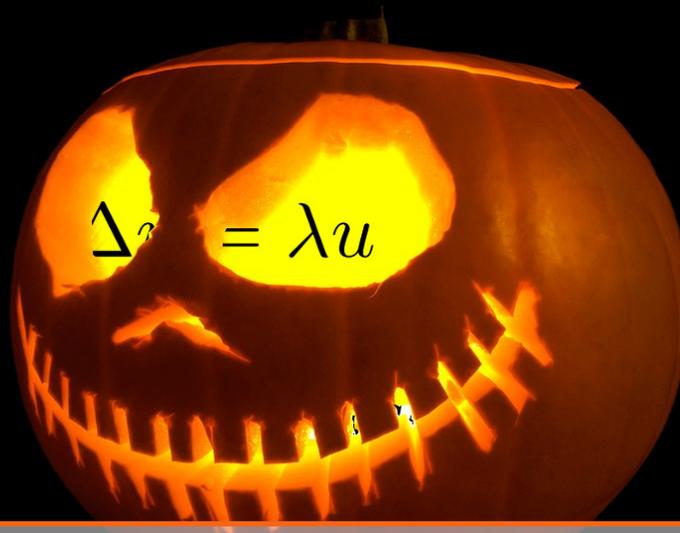
Démonstration. *Exercice* : Montrer qu'un projecteur compact est de rang fini. Calculer le spectre de $R_A(z_0)$ par la théorie de Fredholm. En utilisant l'application $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$, montrer que les projecteurs spectraux de A se déduisent de ceux de $R_A(z)$. \square

Théorème 6.22 Si V est une fonction réelle continue telle que $V(x) \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$, alors l'opérateur de Schrödinger $P = -\Delta + V$ sur \mathbb{R}^n est à résolvante compacte.

Démonstration. exercice ? Voir plusieurs étapes dans le livre [2]. Voir aussi [4, Theorem XIII.67]. \square

Exercice 6.23 En dimension infinie, un opérateur à résolvante compacte n'est jamais borné. ■





7. Opérateurs auto-adjoints

7.1 Extensions auto-adjointes des opérateurs symétriques

On rappelle que A (avec domaine dense) est auto-adjoint si $A^* = A$. Comme un adjoint est fermé, un opérateur auto-adjoint est toujours fermé. Un opérateur symétrique ($A \subset A^*$) est toujours fermable.

Définition 7.1 On dit qu'un opérateur fermable A est *essentiellement auto-adjoint* si $\overline{A} = A^*$.

Exercice 7.2 Dans ce cas, A (est symétrique et) admet au plus une unique extension auto-adjointe, qui est égale à $(\overline{A})^* = \overline{A}$. ■

Cette notion est naturelle si on veut « diagonaliser les opérateurs symétriques » :

Exercice 7.3 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur symétrique sur \mathcal{H} séparable. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base Hilbertienne. On suppose que pour tout n , $f_n \in \text{Dom}(A)$ et il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$Af_n = \lambda_n f_n$$

Alors A est essentiellement auto-adjoint et

$$\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}}.$$

R On peut appliquer ça à l'oscillateur harmonique, pour lequel les fonctions de Hermite forment une base Hilbertienne.

Lemme 7.4 Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est symétrique
2. $\forall u \in \text{Dom}(A), \langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$
3. $\forall u \in \text{Dom}(A), \|(A + i)u\|^2 = \|Au\|^2 + \|u\|^2$
4. $\forall u \in \text{Dom}(A), \|(A + i)u\|^2 = \|(A - i)u\|^2$

Démonstration. On a déjà vu $1 \iff 2$. Pour obtenir 3 il suffit de faire le calcul. Pour l'équivalence avec 4 on peut utiliser l'identité du parallélogramme :

$$\left\| \frac{Au + iu}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{Au - iu}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|Au\|^2 + \|iu\|^2)$$

et donc

$$\|(A - i)u\|^2 - \|(A + i)u\|^2 = 2(\|Au\|^2 + \|u\|^2 - \|(A + i)u\|^2).$$

□

Théorème 7.5 Si A est auto-adjoint, alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ (et est non vide).

Démonstration. *Spectre réel :*

Puisque A est symétrique, le point 3 donne

$$\|(A + i)u\| \geq \|u\|$$

donc $(A + i)$ est injectif. Puisque A est fermé, on en déduit également que l'image de $(A + i)$ est fermée. (exo). On a

$$\text{ran}(A + i)^\perp = \ker(A^* - i)$$

ce dernier vaut $\ker(A - i)$ puisque $A = A^*$, donc l'image de $A + i$ est dense et donc égale à \mathcal{H} . Donc $A + i$ est inversible.

Pour $z = a - ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on écrit $A - z = b(\frac{1}{b}A - \frac{a}{b} + i)$ et l'opérateur $B = \frac{1}{b}A - \frac{a}{b}$ est encore auto-adjoint, donc $i \notin \sigma(B)$, et donc $A - z$ est inversible.

Spectre non vide : (début) Sinon, A^{-1} serait borné, et son spectre serait $\{0\}$: en effet, pour $z \neq 0$, $A^{-1} - z$ est inversible d'inverse $\frac{1}{z}A(\frac{1}{z} - A)^{-1}$. Si 0 n'était pas dans le spectre, ce dernier serait donc vide. Or pour un opérateur borné, le spectre ne peut pas être vide (la résolvante serait holomorphe bornée et 0 à l'infini : plus précisément si B est borné et $|z| > \|B\|$ la série de Neumann donne directement $\|R_B(z)\| \leq \frac{1}{|z| - \|B\|}$). On verra plus tard que ça implique $A^{-1} = 0$ ce qui contredit $AA^{-1} = \text{Id}$. □

Définition 7.6 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ symétrique. L'opérateur

$$U_A := (A - i)(A + i)^{-1}$$

est isométrique de $\text{ran}(A + i)$ dans $\text{ran}(A - i)$ et s'appelle la **transformée de Cayley** de A .

Démonstration. Par le lemme, $(A + i)$ est injectif donc bijectif de $\text{Dom}(A)$ sur son image. U_A est donc bien défini, et le lemme montre qu'il est isométrique. □

Proposition 7.7 *Les extensions symétriques de A sont en bijection avec les extensions isométriques de la transformée de Cayley de A .*

Avantage : une isométrie est toujours un opérateur borné !

Démonstration rapide. Puisque $U_A(A + i) = (A - i)$ sur $\text{Dom}(A)$, on a

$$(U_A - 1)A = \frac{1}{i}(U_A + 1)$$

donc pour retrouver A à partir de U_A on voudrait que $U_A - 1$ soit inversible à gauche ; on a même mieux :

Lemme 7.8 *Pour toute extension isométrique V de U_A , $V - 1$ est injectif.*

Démonstration. Soit $(V, \text{Dom}(V))$ une telle extension : $\text{ran}(A + i) \subset \text{Dom}(V)$. Si $Vu = u$, alors pour $g \in \text{Dom}(V)$,

$$\langle Vu, Vg \rangle = \langle u, v \rangle \text{ donc } \langle u, Vg - g \rangle = 0.$$

Prenons $g = (A + i)h$ pour $h \in \text{Dom}(A)$, de sorte que $Vg = U_A g$. On obtient

$$(V - 1)g = U_A g - g = (A - i)h - (A + i)h = -2ih \quad (7.1)$$

donc

$$0 = \langle u, Vg - g \rangle = 2i\langle u, h \rangle$$

donc, par densité de $\text{Dom}(A)$, $u = 0$. □

Il existe donc un unique $B : \text{ran}(V - 1) \rightarrow \mathcal{H}$ tel que $B(V - 1) = \text{Id}$. On voit par (7.1) que $\text{Dom}(A) \subset \text{ran}(V - 1)$. On va donc définir une extension \tilde{A} de A par $\text{Dom}(\tilde{A}) = \text{ran}(V - 1)$ et

$$\tilde{A} = \frac{1}{i}B(V + 1) = \frac{1}{i}B(V - 1 + 2) = \frac{1}{i}(1 + 2B)$$

Montrons que \tilde{A} est symétrique et que V est la transformée de Cayley de \tilde{A} . En effet $\tilde{A} + i = -2iB$, donc $(\tilde{A} + i)(V - 1) = -2i$, tandis que $(\tilde{A} - i)(V - 1) = -2i(B + 1)(V - 1) = -2i(1 + V - 1) = -2iV$, donc

$$V(\tilde{A} + i)(V - 1) = (\tilde{A} - i)(V - 1)$$

donc sur $\text{Dom}(V) = \text{ran}(V - 1)$ on a

$$V(\tilde{A} + i) = (\tilde{A} - i). \quad (7.2)$$

Par unitarité de V , on trouve que $\|(A + i)u\|^2 = \|(A - i)u\|^2$, donc par le lemme, \tilde{A} est symétrique. La formule (7.2) dit que V est bien la transformée de Cayley de \tilde{A} . □

Remarque : **Si A est fermé**, on rappelle que $\text{ran}(A \pm i)$ est fermée, et les extensions isométriques V se décrivent de la manière suivante : $V = U_A \oplus W$ avec

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & = & \text{ran}(A + i) \oplus \text{ran}(A + i)^\perp \\ & & U_A \downarrow \quad \downarrow W \\ \mathcal{H} & = & \text{ran}(A - i) \oplus \text{ran}(A - i)^\perp \end{array}$$

Il s'agit donc de comprendre les isométries W entre $\text{ran}(A + i)^\perp$ et $\text{ran}(A - i)^\perp$, c'est-à-dire $\ker(A^* \mp i)$. Dans le cas général, il faut passer aux adhérences des images de $(A \pm i)$. Mais puisque U_A est isométrique donc borné, il s'étend de façon unique sur ces adhérences. La conclusion est donc la même : le seul degré de liberté est les isométries de $\ker(A^* + i) \rightarrow \ker(A^* - i)$.

Définition 7.9 Les dimensions de $\ker(A^* \pm i)$ sont appelés les **indices de défaut** de A (éventuellement infinis).

Théorème 7.10 Si A est symétrique, alors il admet des extensions auto-adjointes si et seulement si les indices de défaut sont égaux (c'est-à-dire les sous-espaces correspondants sont isomorphes.) Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est essentiellement auto-adjoint ;
2. Les indices de défaut sont nuls ;
3. A admet une unique extension auto-adjointe.

Démonstration. L'équivalence entre 1 et 2 est indépendante de la transformée de Cayley. Puisque les indices de défaut restent les mêmes en prenant la fermeture \bar{A} (exo), il suffit de montrer que A est auto-adjointe si et seulement si les indices sont nuls. (Voir exercice 7.2).

Si A est auto-adjoint, et $A^*u = \pm iu$, alors $Au = \pm iu$ donc $\langle Au, u \rangle = \pm i \|u\|^2$ qui n'est réel (A symétrique) que si $u = 0$.

Réciproquement, puisque $\text{ran}(A + i)$ est fermée et son complémentaire orthogonal est nul, $\text{ran}(A + i) = \mathcal{H}$. Pour tout $v \in \text{Dom}(A^*)$, il existe $u \in \text{Dom}(A)$ tel que $(A + i)u = (A^* + i)v$. Or $A^*u = Au$ car $A \subset A^*$ donc $(A^* + i)(u - v) = 0$ donc $u - v \in \ker(A^* + i) = 0$ donc $u = v$, donc $v \in \text{Dom}(A)$. Ça prouve que $A^* \subset A$, et donc égalité.

$3 \Rightarrow 2$: utiliser Cayley. □

R Les indices de défaut sont nuls ssi les images $\text{ran}(A \pm i)$ sont denses dans \mathcal{H} .

Exercice 7.11 L'opérateur $i\partial_x$ sur $L^2(\mathbb{R}^+)$ avec domaine $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ est symétrique, mais n'admet pas d'extension auto-adjointe. ■

■ **Exemple 7.12 — exercice.** L'opérateur $i\partial_x$ sur $L^2(0, 1)$ avec domaine C_0^∞ est symétrique, ses indices de défaut sont $(1, 1)$, donc il n'est pas essentiellement auto-adjoint : les extensions auto-adjointes sont paramétrées par le cercle unité. ■

Théorème 7.13 Soit $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et soit $P = -\Delta + V$ l'opérateur de Schrödinger agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec domaine C_0^∞ . On suppose que V est minoré. Alors P est essentiellement auto-adjoint. En particulier, on obtient son extension auto-adjointe par la construction de Friedrichs, et son domaine est $\text{Dom}(P) = \{v \in L^2; Pv \in L^2\}$.

Démonstration. Voir [2, Proposition 2.78] pour montrer que les images $\text{ran}(P \pm i)$ sont denses.

Le domaine de l'adjoint est donné par les $v \in \mathcal{H}$ tels que $\langle Pu, v \rangle = \langle u, h \rangle$ pour un $h \in \mathcal{H}$, (et tout $u \in \text{Dom}(A)$). Quand P est un opérateur différentiel symétrique

à coefficients C^∞ , agissant sur L^2 avec domaine C_0^∞ , on peut écrire

$$\langle v, Pu \rangle = \langle v, \overline{Pu} \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle Pv, \bar{u} \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

où dans le dernier terme, P est vu comme opérateur continu de $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$. On obtient donc $Pv = h \in \mathcal{D}'$, donc $Pv \in L^2$. □

7.2 Spectre des opérateurs auto-adjoints

Caractérisation par minoration.

Proposition 7.14 *Si A est auto-adjoint alors $\lambda \in \rho(A)$ si et seulement si $\exists C > 0$ tq*

$$\|(A - \lambda \text{Id})u\| \geq \frac{1}{C} \|u\| \quad \forall u \in \text{Dom}(A).$$

Démonstration. Le sens direct est immédiat puisque $(A - \lambda \text{Id})^{-1}$ est bornée.

Réciproquement, puisque A est fermé, on obtient comme d'habitude que $(A - \lambda \text{Id})$ est injectif d'image fermée. Mais l'image est dense : en effet $\text{ran}(A - \lambda \text{Id})^\perp = \ker(A - \bar{\lambda} \text{Id})$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\bar{\lambda} = \lambda$ et par hypothèses ce noyau est nul. Si $\lambda \notin \mathbb{R}$ le noyau est également nul car on sait que le spectre est réel (Théorème 7.5). Donc $(A - \lambda \text{Id})$ est inversible. □

Exercice 7.15 Plus précisément ça montre que $B(\lambda, \frac{1}{C}) \subset \rho(A)$. ■

Critère de Weyl auto-adjoint.

Proposition 7.16 *Soit A un opérateur auto-adjoint. Alors $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement s'il existe une suite (u_n) de norme 1 dans le domaine telle que*

$$\|(A - \lambda \text{Id})u_n\| \rightarrow 0.$$

Démonstration. Un sens est déjà connu. Pour l'autre, on écrit la contraposée de la proposition précédente : si $\lambda \in \sigma(A)$ alors pour toute C_n il existe $u_n \in \text{Dom}(A)$ (qu'on normalise) tel que $\|(A - \lambda \text{Id})u_n\| < 1/C_n$. On prend par exemple $C_n = n$. □

Rayon spectral.

Définition 7.17 Soit B un opérateur borné (pas nécessairement auto-adjoint). La limite suivante existe et s'appelle le **rayon spectral** de B :

$$r(B) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \|B^n\|^{1/n}$$

Exercice 7.18 Montrer la convergence. [2, Lemma 3.20]. ■

Proposition 7.19 *Soit B un opérateur normal : $BB^* = B^*B$. Alors $r(B) = \|B\|$.*

Démonstration. C'est un exo classique, voir par exemple [2, Prop 3.27] □

Théorème 7.20 Soit B un opérateur borné. Alors

$$r(B) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(B)\}.$$

Démonstration. La résolvante

$$(B - \lambda \text{Id})^{-1} = -\lambda^{-1} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{B}{\lambda}\right)^k$$

est une série entière en λ^{-1} et par le critère de Cauchy-Hadamard, son rayon de convergence est $1/r(B)$ (éventuellement $+\infty$). Ce qui veut dire que si $1/|z| < 1/r(B)$ alors $z \in \rho(B)$, donc $\sigma(B) \subset B_f(0, r(B))$, mais aussi qu'il existe un λ de module $r(B)$ où la résolvante n'est pas analytique, donc dans le spectre. Exercice : vérifier que ça marche aussi si $r(B) = 0$, le spectre est $\{0\}$. \square

Définition 7.21 Si $r(B) = 0$ on dit que B est *quasi-nilpotent*. C'est équivalent à $\sigma(B) = \{0\}$.

Proposition 7.22 — « **norme de la résolvante** ». Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur auto-adjoint. Alors

$$\|R_A(z)\| = \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))}.$$

Démonstration. Puisque $R_A(z)^* = R_A(\bar{z})$, $R_A(z)$ est un opérateur normal. Donc par la proposition 7.19, sa norme est égale à son rayon spectral. Par le théorème 7.20, c'est le module sup du spectre. Par le lien entre le spectre de A et celui de sa résolvante (cf exercice preuve du théorème 6.21), on a la formule. \square

R Important : c'est la première manifestation du *théorème spectral* : voir plus loin.

Le projecteur orthogonal.

Théorème 7.23 Si $(A, \text{Dom}(A))$ est auto-adjoint et $\lambda \in \sigma(A)$ est isolée dans le spectre, alors le projecteur spectral P_λ est le projecteur orthogonal sur $\ker(A - \lambda \text{Id})$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $P_\lambda = P_\lambda^*$ et que $P_\lambda(\mathcal{H}) \subset \ker(A - \lambda \text{Id})$ (l'autre inclusion est toujours vraie).

On peut passer à l'adjoint dans la somme de Riemann d'opérateurs bornés qui définit P_λ . Puisque $R_A(z)^* = P_A(\bar{z})$, il suffit de faire le changement de variables $\theta \mapsto -\theta$ dans l'intégrale pour obtenir $P_\lambda^* = P_\lambda$.

Montrons maintenant que $(A - \lambda \text{Id})P_\lambda = 0$. Comme A est fermée, on a vu qu'elle commute avec P_λ et donc

$$(A - \lambda \text{Id})P_\lambda = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} (A - \lambda \text{Id})R_A(z)dz.$$

Par (R1), on a

$$(A - \lambda \text{Id})R_A(z) = \text{Id} + (z - \lambda)R_A(z) \tag{7.3}$$

donc

$$\begin{aligned}(A - \lambda \text{Id})P_\lambda &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \text{Id} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} (z - \lambda)R_A(z)dz \\ &= 0 - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\lambda} f(x)dz\end{aligned}\tag{7.4}$$

où on note $f(z) = (z - \lambda)R_A(z)$. Par la norme de la résolvante (proposition 7.22), $\|f(z)\| \leq |z - \lambda| \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))} = 1$ puisque $z \in \Gamma_\lambda$ et qu'on peut prendre ce cercle aussi proche de λ qu'on veut. Donc f est holomorphe dans le disque épointé, et bornée au centre, donc holomorphe dans tout le disque (par exemple par le théorème de Morera). Donc la deuxième intégrale dans (7.4) est nulle. \square

Corollaire 7.24 Si A est auto-adjoint et $\lambda \in \sigma(A)$ est isolée, alors c'est une valeur propre.

Démonstration. Sinon, on obtiendrait par le théorème que $P_\lambda = 0$, or c'est impossible : soit u_n une suite de Weyl pour $A - \lambda \text{Id}$ (proposition 7.16). En utilisant (7.3), on voit que

$$R_A(z) = \frac{(A - \lambda \text{Id})R_A(z)}{z - \lambda} - \frac{\text{Id}}{z - \lambda}.$$

Puisque $u_n \in \text{Dom}(A)$, $(A - \lambda \text{Id})R_A(z)u_n = R_A(z)(A - \lambda \text{Id})u_n \rightarrow 0$. donc en intégrant

$$P_\lambda u_n = w_n + u_n$$

avec $w_n \rightarrow 0$ donc (u_n) est une suite de Weyl pour $P_\lambda - \text{Id}$, donc $1 \in \sigma(P_\lambda)$, qui n'est donc pas nul. \square

Quasi-modes.

Lorsqu'un vecteur u vérifie « presque » l'équation aux valeurs propres, alors il n'est pas forcément proche d'un vrai vecteur propre (un « mode ») mais par contre, la « presque valeur propre » correspondante sera proche du spectre. C'est très utilisé.

Proposition 7.25 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur auto-adjoint. On suppose qu'il existe $u \in \text{Dom}(A)$, $u \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\epsilon > 0$ tels que

$$\|(A - \lambda \text{Id})u\| \leq \epsilon \|u\|.$$

Alors $\sigma(A) \cap [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \neq \emptyset$.

Démonstration. Sinon, $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \subset \rho(A)$ donc $\text{dist}(\lambda, \sigma(A)) > \epsilon$, donc par la proposition 7.22, $\|R_A(z)\| < 1/\epsilon$. Donc pour tout $u \in \text{Dom}(A) \setminus \{0\}$,

$$\|u\| < \frac{1}{\epsilon} \|(A - \lambda)u\|,$$

ce qui contredit l'hypothèse. \square

R Cette proposition redémontre le critère de Weyl (Proposition 7.16).

Applications : elles sont multiples ! Par exemple la construction de quasi-modes pour l'équation de Schrödinger (ou le Laplacien riemannien) par la méthode BKW est très utilisée pour obtenir une approximation des premières valeurs propres dans la limite semi-classique $\hbar \rightarrow 0$.

7.3 Quotients de Rayleigh

On appelle « quotient de Rayleigh » une quantité de la forme $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^2}$. Rappel : si $\|u\| = 1$, on avait introduit $\langle Au, u \rangle$ comme l'« observation de l'état (particule quantique) u au moyen de l'observable A ». Si A est auto-adjoint, cette quantité est réelle.

Théorème 7.26 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur auto-adjoint, minoré (càd semi-borné inférieurement). Alors

$$\min \sigma(A) = \inf_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \text{Dom}(A)}} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^2}.$$

Bien sûr si A est majoré, le résultat analogue pour le max du spectre et des quotients de Rayleigh est valable. En particulier si A est borné, son spectre est contenu dans $[m, M]$, où m, M sont le min et le max, respectivement, des quotients de Rayleigh, et sont contenues dans le spectre.

Lemme 7.27 Si A est auto-adjoint,

$$\langle Au, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \text{Dom}(A) \iff \sigma(A) \subset [0, +\infty].$$

Démonstration. Si $\langle Au, u \rangle \geq 0$ alors $\forall \epsilon > 0$

$$\langle (A + \epsilon \text{Id})u, u \rangle \geq \epsilon \|u\|^2$$

donc

$$\forall u \in \text{Dom}(A), \quad \epsilon \|u\| \leq \|(A + \epsilon \text{Id})u\|$$

donc par le critère de minoration, $-\epsilon \notin \sigma(A)$. Donc $\sigma(A) \subset [0, +\infty]$.

Réciproquement, si $\sigma(A) \subset [0, +\infty]$, alors $\forall x > 0$, par la proposition 7.22 on a $\|R_A(-x)\| \leq \frac{1}{x}$. Donc

$$x^2 \|u\|^2 \leq \|(A + x \text{Id})u\|^2 = \|Au\|^2 + x^2 \|u\|^2 + 2x \Re \langle Au, u \rangle,$$

donc $\langle Au, u \rangle = \Re \langle Au, u \rangle \geq -\frac{1}{2x} \|Au\|^2$. Il suffit de faire $x \rightarrow +\infty$. \square

Démonstration du théorème. Posons $m = \inf_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \text{Dom}(A)}} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^2}$, et $\tilde{A} = A - m \text{Id}$.

Donc $\inf \frac{\langle \tilde{A}u, u \rangle}{\|u\|^2} = 0$, soit, pour tous $u \in \text{Dom}(A)$, $\langle \tilde{A}u, u \rangle \geq 0$. Donc par le lemme, $\sigma(\tilde{A}) \subset [0, +\infty]$. Si on avait $0 \notin \sigma(\tilde{A})$, comme le spectre est fermé, il existerait $\alpha > 0$ tel que $\sigma(\tilde{A}) \subset [\alpha, +\infty]$, donc par le lemme, $\langle (\tilde{A} - \alpha \text{Id})u, u \rangle \geq 0$ ce qui donnerait

$$\frac{\langle \tilde{A}u, u \rangle}{\|u\|^2} \geq \alpha,$$

contradiction. \square

Exercice 7.28 Si $(A, \text{Dom}(A))$ est auto-adjoint et $\sigma(A) = \{0\}$, alors $A = 0$. (Ça termine donc la preuve que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est non vide, voir le théorème 7.5.) \blacksquare

Exercice 7.29 Soit A auto-adjoint à résolvante compacte. Alors son spectre est discret et il existe une base orthonormée de vecteurs propres. \blacksquare

Démonstration. On sait déjà que le spectre est discret. Pour chaque λ_n , on prend une base orthonormée du sous-espace propre, et il faut montrer que ça forme une base Hilbertienne de \mathcal{H} . Par exemple en montrant que la restriction de A à l'orthogonal de l'espace engendré a un spectre $\{0\}$. \square

Une jolie extension : le « **min-max** ». Voir [2, Theorem 6.23].

7.4 Théorème spectral

Il y a plusieurs « théorèmes spectraux ». Dans tous les cas, l'idée est d'avoir la description « ultime » d'un opérateur auto-adjoint par son spectre.

La forme la plus impressionnante de ces théorèmes est peut-être celle qui dit que tout opérateur auto-adjoint est conjugué à un opérateur « diagonal » dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres. Évidemment c'est simple en dimension finie, mais que veut dire « diagonal » si on n'a pas de base de fonctions propres ? Voir le théorème 7.33.

Ceci dit, la forme la plus souvent utilisée est ce qu'on appelle le « calcul fonctionnel », c'est-à-dire simplement le fait qu'on arrive à définir l'opérateur $f(A)$ pour essentiellement toute fonction f .

Calcul fonctionnel continu.

C'est la forme la plus facile. Ceci dit, il faut faire attention. Pour les opérateurs bornés B , on peut directement définir $P(B)$ pour tout polynôme P , et conclure par densité, avec des polynômes de degrés de plus en plus grands. Bien sûr ça ne va pas marcher avec A non borné, puisque le domaine de A^n peut devenir très petit si n est grand...

À la place on va considérer $f \in C_0^0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. Bien sûr ça ne contient pas les polynômes, mais l'avantage est que $f(A)$ sera toujours un opérateur borné.

Théorème 7.30 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur auto-adjoint agissant sur \mathcal{H} . Il existe une unique application linéaire $\Phi_A : f \mapsto f(A)$ de $C_0^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ telle que :

1. Φ_A est un homomorphisme d'algèbre : $(fg)(A) \mapsto f(A)g(A)$;
2. $\bar{f}(A) = f(A)^*$; (donc homomorphisme de \mathbb{C}^* algèbre) ;
3. $\|f(A)\| \leq \|f\|_\infty$ (Φ_A est 1-Lipschitz) ;
4. Si $z \notin \mathbb{R}$ et $r_z(s) := \frac{1}{s-z}$, alors $r_z(A) = R_A(z)$ (autrement dit, Φ_A fait bien ce qu'on attend pour obtenir une résolvante).

- R** Si A est à **résolvante compacte**, on a une base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs propres, et il suffit de définir

$$f(A) : e_n \mapsto f(\lambda_n)e_n.$$

(Et d'étendre par densité.) Cette recette fonctionne même lorsque f est non bornée : dans ce cas le domaine de $f(A)$ sera les $u = \sum x_n e_n$ tels que $\sum |f(\lambda_n)x_n|^2 < \infty$.

Il y a beaucoup de méthodes pour prouver ce théorème. Dans le livre [2], on se base sur la **formule d'inversion de Fourier** :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

et on « remplace x par A » dans l'intégrale. L'ingrédient de base est donc de savoir définir $e^{i\xi A}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. (Théorème de Stone [2, Chapter 7]).

Démonstration du théorème. Ici, l'approche est plus simple, on se basera plutôt sur les résolvantes $R_A(z)$ qui sont formellement $r_z(A)$ et qu'on a bien sûr déjà définies. On sait donc déjà définir tous les $r_z^N(A) = R_A(z)^N$, $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $E \subset C_0^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel engendré par les r_z^N , $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$. A l'instar de l'identité de la résolvante (R3), le fait remarquable est que E est stable par multiplication, c'est donc une algèbre sur \mathbb{C} , stable par conjugaison complexe. On voit qu'on a ainsi construit Φ_A sur E : on vérifie facilement les points 1 (identité de la résolvante), 2, 3 (Prop 7.22, sachant que $\|r_z\|_{\infty} = \frac{1}{\text{dist}(z, \mathbb{R})}$), et 4 par construction.

Puisque $r_z(s) \neq 0, \forall s \in \mathbb{R}$, l'algèbre E est évidemment non triviale en chaque point, et l'analogue de (R4) montre clairement qu'elle sépare les points. On peut donc appliquer le théorème de Stone-Weierstrass (voir ci-dessous) : E est dense dans $C_0^0(\mathbb{R})$. Puisque Φ_A est 1-Lipschitz sur E , elle s'étend de façon unique sur $C_0^0(\mathbb{R})$. On obtient donc le théorème. \square

- R** Je n'ai bizarrement pas trouvé cette preuve dans la littérature. Merci de me corriger le cas échéant (très probable). Son inconvénient est qu'elle ne donne pas de formule simple pour calculer $f(A)$, même si f est très régulière.

- R** À la place de E , on aurait pu prendre \tilde{E} engendrée par $r_{\pm i}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$, ce qui donnerait la même chose par densité, mais le point 4 serait plus délicat à vérifier (?)

- R** [non fait en cours] Preuve du **Théorème de Stone-Weierstrass pour C_0^0** . [C'est vrai sur tout espace localement compact. En gros on refait quasi toute la preuve de Stone-Weierstrass habituelle... Peut-on faire plus simple ?] Puisque l'algèbre E est composée de fonctions bornées, elle est réticulée (son adhérence est stable par max et min). On se donne $f \in C_0^0$ et $\epsilon > 0$. Première étape : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $g_x \in \bar{E}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{R}, g_x(z) < f(z) + \epsilon \quad \text{et} \quad \forall z \in K_x, g_x(z) > f(z) - \epsilon, \quad (7.5)$$

ou on noté $K_x := [-x, x]$. En effet, fixons x quelconque. Sur le compact K_x , par le théorème de Stone-Weierstrass habituel on trouve $h_x \in \bar{E}$ tel

que $|f - h_x|(z) < \epsilon$ sur K_x . La difficulté est d'étendre en dehors de K_x . On remarque que l'ouvert $\Omega_x := \{z \in \mathbb{R}; |f - h_x|(z) < \epsilon\}$ contient K_x et est compact (parce que f et h_x tendent vers 0 à l'infini); donc le complémentaire de Ω_x est contenu dans un intervalle K_{x_0} . Posons $g_x = \min(h_x; h_{x_0}) \in \overline{E}$. Il vérifie (7.5) car h_{x_0} est une ϵ -approximation de f dans le compact K_{x_0} (qui contient K_x), et en dehors, on ne sait rien pour h_{x_0} , mais par contre on est dans Ω_x donc sait que h_x est une bonne approximation.

Deuxième étape : Soit l'ouvert $V_x := \{z \in \mathbb{R}; |f - g_x|(z) < \epsilon\}$. Remarque : $g_x(z) < f(z) + \epsilon$ est toujours vrai, donc $V_x = \{z \in \mathbb{R}; g_x(z) > f(z) - \epsilon\}$. On remarque que $K_x \subset V_x$. Soit L le complémentaire de V_0 ; L est compact (car f et g_x tendent vers 0), donc il est contenu dans un K_{x_1} , $x_1 > 0$. Posons $g = \max(g_0, g_{x_1}) \in \overline{E}$. On préserve l'inégalité $g(z) < f(z) + \epsilon$, et comme en chaque point z , il existe au moins un g_x tel que $g_x(z) > f(z) - \epsilon$ (dans V_0 on prend g_0 , en dehors on prend g_{x_1}), c'est vrai partout pour g .

Conclusion : \overline{E} est dense dans C_0^0 , (donc égale à C_0^0).

Proposition 7.31 *A commute avec $f(A)$. L'opérateur $f(A)$ est normal. Si f est réelle, alors $f(A)$ est auto-adjoint et*

$$\sigma(f(A)) \subset [\inf f, \sup f].$$

Démonstration non fait en cours. On a $R_A(z)A \subset AR_A(z)$ pour tous z . Donc pour tous $f_j \in E$, $f_j(A)A \subset Af_j(A)$, ce qui veut dire que si $u \in \text{Dom}(A)$, alors $f_j(A)u \in \text{Dom}(A)$ et $f_j(A)Au = Af_j(A)u$. Soit $f_j \rightarrow f \in C_0^0$. Par 3, $f_j(A)u \rightarrow f(A)u$, et $f_j(A)(Au) \rightarrow f(A)(Au)$. Puisque A est fermée, on en déduit que $f(A)u \in \text{Dom}(A)$ et $f(A)Au = Af(A)u$, donc A commute bien avec $f(A)$.

Si f est réelle, $f(A)$ est auto-adjoint par 2.

Si $f = f_1 + if_2$ (avec f_1, f_2 réels) alors $f_1(A)$ et $f_2(A)$ sont auto-adjoints et commutent entre eux par 1, donc $f(A)$ est normal.

Si $f \geq 0$, On obtient facilement que $f(A) \geq 0$ (on dit que Φ_A est positive) en écrivant $f(s) = g(s)^2$ pour une fonction $g \in C_0^0$; et donc, par 1 et puisque $g(A)$ est auto-adjoint,

$$\langle f(A)u, u \rangle = \langle g(A)^2u, u \rangle = \langle g(A)u, g(A)u \rangle \geq 0.$$

On a également, toujours si $f \geq 0$, que $\max \sigma(f(A)) = r(f(A)) = \|f(A)\| \leq \|f\|_\infty = \sup f$. Donc la proposition est prouvée pour $f \geq 0$.

Pour le cas général, on écrit $f = f_+ - f_-$ avec $f_\pm \geq 0$. Donc $f(A) = f_+(A) + f_-(A)$ et on obtient : $\langle f(A)u, u \rangle \leq \langle f_+(A)u, u \rangle \leq (\sup f_+) \|u\|^2$ et $\langle f(A)u, u \rangle \geq -\langle f_-(A)u, u \rangle \geq -(\sup f_-) \|u\|^2$. puisque $f \in C_0^0$, on a $\sup f = \sup f_+ \geq 0$ et $\inf f = -\sup f_- \leq 0$. Donc

$$(\inf f) \|u\|^2 \leq \langle f(A)u, u \rangle \leq (\sup f) \|u\|^2$$

ce qui donne le résultat voulu par les quotients de Rayleigh (théorème 7.26). □

R On peut facilement étendre ce calcul fonctionnel aux fonctions continues qui ont une limite (commune) en $\pm\infty$: il suffit d'ajouter les constantes $C_0^0(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}$, et de poser, pour $f = f_0 + C$, $f(A) := f_0(A) + C\text{Id}$. Ça reste une algèbre, et on voit que les points du théorème sont automatiquement vérifiés. On voit ainsi que la propriété 3 est en fait équivalente à la positivité.

Exercice 7.32 Montrer par un calcul direct que la proposition est valable pour les fonctions $g(s) = r_i(s) + r_{-i}(s)$ et $h(s) = -i(r_i(s) - r_{-i}(s))$. ■

Le théorème de représentation L^2

On va conjuguer A (de façon unitaire) à un opérateur de multiplication sur son spectre... modulo l'ennui des vecteurs cycliques...

Théorème 7.33 — (3, Theorem 2.5.1). Soit $(A, \text{Dom}(A))$ un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} . Il existe une mesure finie μ sur $\sigma(A) \times \mathbb{N}$ et un opérateur unitaire

$$\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}^2 := L^2(\sigma(A) \times \mathbb{N}; d\mu)$$

tels que, si on note $h : \sigma(A) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $h(\lambda, n) = \lambda$, alors

1. $\text{Dom}(A) = \{v \in \mathcal{H}; h \cdot \mathcal{U}v \in \mathcal{L}^2\}$
2. $\mathcal{U}A\mathcal{U}^{-1}\psi = h\psi, \forall \psi \in \mathcal{U}(\text{Dom}(A))$
3. $\forall f \in C_0^0(\mathbb{R}), \mathcal{U}f(A)\mathcal{U}^{-1} = f(h)\psi$.

Exercice 7.34 Que veut dire ce théorème pour une matrice diagonalisable? ■

Le facteur \mathbb{N} est là pour indexer les sous-espaces cycliques dans \mathcal{H} . Si \mathcal{H} admet un vecteur cyclique pour A , alors on peut supprimer le facteur \mathbb{N} dans l'énoncé : on obtient vraiment un opérateur de multiplication sur le spectre.

Définition 7.35 Si B est un opérateur borné, et $v \in \mathcal{H}$, le **sous-espace cyclique** pour B de **vecteur cyclique** v est

$$G = \overline{\text{Vect}\{B^n v; \quad n \geq 1\}}$$

Les sous-espaces cycliques sont stables par B .

Définition 7.36 Soit $(A, \text{Dom}(A))$ auto-adjoint et $v \in \mathcal{H}$. Le **sous-espace cyclique** pour A de **vecteur cyclique** v est

$$G := \overline{\text{Vect}\{R_A(z)v; \quad z \notin \mathbb{R}\}}.$$

Lemme 7.37 Si $A = B$ est borné, les deux définitions coïncident.

Lemme 7.38 Si $(A, \text{Dom}(A))$ auto-adjoint, et \mathcal{H} séparable, alors il existe une suite (G_n, v_n) de sous-espaces cycliques telle que

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n}$$

(somme orthogonale).

Démonstration. Par récurrence. Dans le cas non séparable, ça marche aussi avec une famille de cardinal général, utiliser le lemme de Zorn. □

Calcul fonctionnel borélien

[non fait en cours]

Comme conséquence du théorème de représentation L^2 , on peut étendre le calcul fonctionnel à toute fonction borélienne bornée, avec les mêmes propriétés que le

théorème 7.30. Cette extension est unique si on demande que

$$\forall u \in \mathcal{H}, \quad f_j(A)u \rightarrow f(A)u$$

lorsque la suite de fonctions f_j converge vers f en chaque point de façon monotone.

Définition 7.39 Si $I \subset \mathbb{R}$, et $f = \mathbf{1}_I$ (fonction caractéristique de I), alors l'opérateur $f(A)$ s'appelle le **projecteur spectral** sur I .

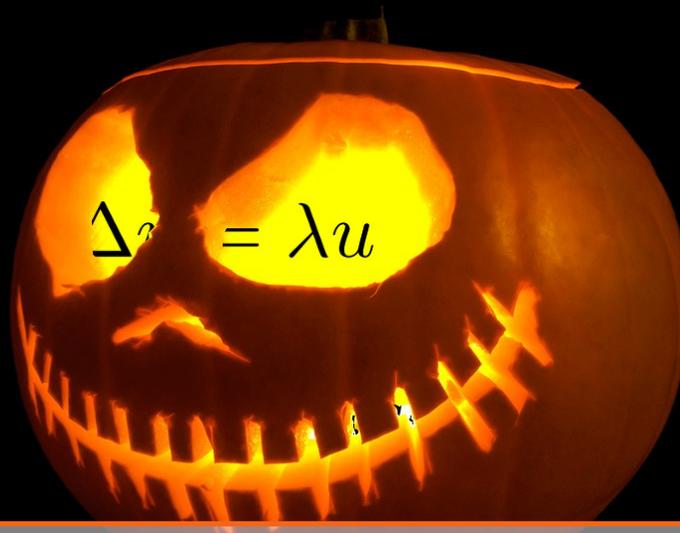
Si $\lambda \in \sigma(A)$ et $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$, alors le projecteur spectral P_λ associé à λ (théorème 7.23) coïncide avec ce nouveau projecteur spectral auto-adjoint.

Fonctions boréliennes non bornées

Ça fonctionne aussi, mais évidemment les opérateurs $f(A)$ ne sont plus nécessairement bornés : on va avoir

$$\text{Dom}(f(A)) = \{u \in \mathcal{H}; \quad f(h)\mathcal{U}u \in \mathcal{L}^2\}.$$





Bibliographie

- [1] Henri CARTAN. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Avec le concours de Reiji Takahashi. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961, page 232 (cf. pages 32, 33).
- [2] Christophe CHEVERRY et Nicolas RAYMOND. *A Guide to Spectral Theory*. Advanced Texts. Birkhäuser, 2020 (cf. pages 8-10, 12, 16, 46, 50, 51, 55, 56).
- [3] E. B. DAVIES. *Spectral Theory and Differential Operators*. Cambridge University Press, 1995 (cf. page 58).
- [4] Michael REED et Barry SIMON. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978, pages xv+396. ISBN : 0-12-585004-2 (cf. page 46).
- [5] Frank W. WARNER. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Tome 94. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1971 edition. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983, pages ix+272. ISBN : 0-387-90894-3 (cf. page 33).

