CD - Cours 13

Table of Contents

2) Applications de classe C^k

En appliquant par récurrence la symétrie de la dérivée seconde, on obtient (voir par exemple le Théorème 2.3 dans [Christol-Cot-Marle]

> Théorème Si f: $U \subset E \to F$ est n fois différentiable en $a \in U$, alors $D^n f(a)$ est une application **n-linéaire continue symétrique** de E^n dans F.

Symétrique veut dire

$D^n f(a) (u_1, \dots, u_n) = D^n f(a) (u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)})$

pour toute permutation σ de $\{1,\dots, n\}$.

On notera $D^k f(a)\cdot(h^k)$ pour $D^k f(a)\cdot(h,\dots,h)$.

Exemple: Une application linéaire continue f(x) = Ax est C^∞:

- $D^1 f(x) = A \quad (\forall x)$
- $D^k f = 0$ pour $k \geq 2$

> Prop: une application **bilinéaire continue** B est C^∞ et ses dérivées sont:
>
> - $DB(x,y)(u,v) = B(u,y) + B(x,v)$
> - $D^2 B(x,y) [(u_1, v_1), (u_2, v_2)] = B(u_1, v_2) + B(u_2, v_1)$
> - $D^k B = 0$ pour $k > 2$.

Preuve exercice

> Prop:
>
> 1. Si f est à valeurs dans un espace produit $F_1 \times \cdots \times F_p$, alors f est C^k si et seulement si toutes ses composantes f_j sont C^k. Dans ce cas, les composantes de $D^m f(a)$ sont les $D^m f_j(a)$, pour $m=0,\dots,k$.

2. Les composée de deux applications C^k est C^k.
3. Si f est définie sur un espace produit $E_1 \times \cdots \times E_n$, alors f est C^{k+1} si et seulement si ses dérivées partielles sont C^k.

Preuve:

1. exercice
2. utiliser la proposition précédente, car

   D(f o g)(x) = Df(g(x)) o Dg(x)

   et utiliser l'application bilinéaire continue "composition linéaire" (A,B) → A o B

   et procéder par récurrence.
3. Le cas k=0 est traité dans Chap 3, paragraphe 8 (cf Cours 07). Pour k > 0, on sait alors (pour les 2 implications) que f est différentiable, on peut donc appliquer la formule

$$Df(a)(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) \cdot u_j$$

Théorème **Formule de Taylor avec reste intégral**. Soit f : U⊂ E → F avec F Banach. On suppose f de classe C^n. Soit h ∈ E tel que le segment [a, a + h] soit entièrement contenu dans U. Alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} D^k f(a) \cdot (h^k) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) \cdot (h^{n+1}) dt.$$

Preuve: se ramener à la formule à une variable t en posant g(t) = f(a + th).

Chap 8. Sous-variétés et extrema liés

Attention: on suppose ici dimension finie. Ça s'étend sans trop de difficulté à la dim infinie (espaces de Banach et sous-espaces admettant des supplémentaires fermés).

Dans ce chapitre, on supposera que toutes les applications sont C^k avec $k > 1$. (On dira juste "lisse")

1) Sous-variétés

Soit $E=R^n$

On veut définir des sous-ensembles de E qui soient "lisses" (càd C^k). Qu'est-ce que ça veut dire ?

Par exemple un sous-espace vectoriel est certainement lisse. Mais ce n'est pas le seul cas! par exemple on a envie de dire qu'un cercle dans R^2 est lisse.

Une définition tentante serait de dire qu'un ensemble est lisse si c'est le graphe d'une application lisse. Mais ça ne fonctionne pas pour le cercle: un demi-cercle peut être décrit comme un graphe, mais pas un cercle complet.

Remarquons qu'un sous espace vectoriel est toujours le noyau d'une application linéaire surjective (par exemple la projection sur l'orthogonal). On va déformer cette notion par des difféomorphismes.

<u>Définition:</u> Une application g : U ⊂ E → F est une <u>submersion locale</u> en a∈ U si, à difféomorphismes près en a et g(a), c'est une surjection linéaire: il existe k≥ 0 et φ : U → R^{m+k} difféo local en a avec φ(a)=0 et ψ : g(U) → R^m difféo local en b=g(a) avec ψ(b)=0 tel que

$$\psi \circ g \circ \phi^{-1}(x,y) = x \qquad x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k.$$

L'équation "g(z) = g(a)" devient donc ψ(g(z)) = ψ(g(a)) et donc en posant (x,y) = φ(z) on a l'équation "x = ψ(g(a))", cette équation décrit donc (localement) l'ensemble "x=constante=x_0", qui est donc donné par z = φ^{-1} (x_0, y), paramétré par y dans R^k.

<u>Définition</u> Une partie S ⊂ E est une **sous-variété** de E si pour chaque point a∈ S, il existe un evn F et une submersion locale g : U → F en a telle que S ∩ U soit exactement donné par l'équation g(x) = g(a).

Si S est connexe, l'entier k de la définition de submersion locale est la **dimension** de S.

Heureusement, tester le fait d'être une submersion locale est très facile, grâce au théorème d'inversion locale:

<u>Theorème</u> (théorème de submersion locale) g est une submersion locale en a si et seulement si Dg(a) est surjective.

<u>Remarque:</u> application linéaire surjective = de rang maximal.

Par exemple le cercle unité dans R^2 est une sous-variété, on peut choisir (en tout point du cercle) la submersion g(x,y) = x^2+y^2, car Dg(x) ≠ 0 pour x sur le cercle.

<u>Preuve du théorème de submersion locale:</u>

1. si g est une submersion locale, $\psi \circ g \circ \phi^{-1}(x,y) = x$, donc $g = \psi^{-1} \circ \pi_1 \circ \phi$ où $\pi_1(x,y) = x$.

   En différentiant en a: (posons b = g(a))

   $$Dg(a) = (D\psi(b))^{-1} \circ \pi_1 \circ D(\phi)(a)$$

   L'image de Dg(a) est donc celle de $(D\psi(b))^{-1}) \circ \pi_1$ puisque $D(\phi)(a)$ est inversible. C'est donc l'image de R^m = π_1(R^n) par l'isomorphisme $(D\psi(b))^{-1}$, soit F. Donc $Dg(a) est bien surjective.

2. Si Dg(a) est surjective, on a $E = H \oplus \ker Dg(a)$ et Dg(a) est un isomorphisme de H sur F (espaces de dimension m) (voir aussi exercice 2 de la feuille TD11). En écrivant g(z) = g(x,y) dans cette décomposition, on est dans la situation du théorème des fonctions implicites ($\partial_x g$ est un isomorphisme), et donc l'application φ : (x,y) → (g(x,y),y) ∈ R^m x R^k est un difféo local. On a

   g o φ^{-1} (x,y) = x

   ce qui prouve que g est une submersion locale.

2) Espace tangent

Soit $S \subset E$ une sous-variété, et $a \in S$.

Définition: L'**espace tangent** à S en a est l'espace $T_a S \subset E$ égal à l'ensemble des $\gamma'(0)$ où $\gamma:]-1,1[$ est un chemin C^1 tracé dans S avec $\gamma(0)=a$. [dessin]

Proposition: Soit g une submersion locale en a qui définit S au voisinage de a. Alors $T_a S = \ker Dg(a)$.

Preuve: Puisque g est constant sur S, $g \circ \gamma$ est constant, donc $Dg(a)\cdot\gamma'(0) = 0$. Donc $T_a S \subset \ker Dg(a)$.

Réciproquement, en conjuguant par les difféos de la définition, g s'écrit $(x,y) \to x$, donc un vecteur dans ker Dg(a) est (modulo ces difféos) de la forme (0,v), pour $v \in R^k$, où k est la dimension de S en a. On choisit alors le chemin $t \to (0, tv)$. CQFD.

3) Points critiques et extrema

Soit $f : U \subset E \to F$.

Def on dit que $a \in U$ est un **point critique** de f si Df(a) n'est pas surjective.

Proposition: Supposons $F = \mathbf{R}$. Si f admet un maximum local ou un minimum local en a, alors $Df(a) = 0$.

(bien sûr la réciproque n'est pas vraie, cf $f(x)=x^3$, il faut regarder le signe de la forme quadratique associée à la dérivée seconde.)

Preuve: on a déjà vu la preuve à une variable. Prenons $F(t) = f(a+tu)$, F admet un extremum en t=0, donc $F'(0)=0$, donc $Df(a)\cdot u = 0$. CQFD

Question: Soit S une sous-variété de E. Supposons que x soit **lié à S**, c'est-à-dire qu'on considère uniquement la restriction de f à S. Quelle condition nécessaire pour avoir un extremum de f|S ?

Proposition: **extrema liés**. Si la restriction de $f : U \to \mathbf{R}$ à une sous-variété S admet un extremum local, alors Df(a) s'annule sur l'espace tangent $T_a S$. (autrement dit $T_a \subset \ker Df(a)$.) Si g est une submersion locale en a qui définit S, alors cette condition s'écrit $\ker Dg(a) \subset \ker Df(a)$.

Exemple: S = le cercle S^1 dans R^2. Soit $f(x,y)=x+y$. Quels sont les extrema de f restreint au cercle ? Solution: le cercle est défini par la submersion $g(x,y)=x^2+y^2=1$. L'espace tangent en a=(x,y) est ker Dg(a), soit les vecteurs (u,v) tels que $Dg(a)(u,v) =0$, ça donne:

$xu + yv = 0$

soit: (u,v) orthogonal à (x,y). Donc $(u,v) = \lambda\cdot(-y,x)$. Il doit annuler $Df(a) = Dx + Dy$, soit $u + v = 0$. Donc $x - y = 0$. On obtient les deux points intersection de la diagonale x=y avec le cercle. On vérifie que ce sont bien des extrema.

Définition: Si Df(a) s'annule sur l'espace tangent $T_a S$, on dit que a est un **point critique de f|S**.

Théorème **multiplicateurs de Lagrange** Soit S une sous-variété de E, et soit $g : U \subset E \to F$ une submersion locale en a, telle que $g(z) = g(a)$ soit une équation de S au voisinage de a. Soit U un ouvert contenant S et $f: U \to \mathbf{R}$.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

i) le point a est un point critique de f|S

ii) il existe une forme linéaire λ ∈ F' telle que Df(a) = λ o Dg(a)

La forme linéaire λ est alors unique et s'appelle un **multiplicateur de Lagrange**.

Preuve: C'est une caractérisation purement linéaire sur l'espace tangent T_a S.

(ii) → (i) est clair puisque T_a S = ker Dg(a).

(i) → (ii): λ est unique car l'image de Dg(a) est F.

Pour l'existence: Df(a) est une forme linéaire qui s'annule sur ker Dg(a). On écrit $E = H \oplus \ker Dg(a)$, det Dg(a) induit un isomorphisme A de H sur F. Posons $\lambda = Df(a) \circ A^{-1}$. On a bien Df(a) = λ o Dg(a).

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-12-13 mer. 15:44