CD - Cours 12

Table of Contents

1) Applications deux fois différentiables

(…)

Théorème ("Lemme de Schwarz") Si f est deux fois différentiable au point a, sa dérivée seconde $D^2 f(a)$ appartient à l'espace $L^2{}_S(E, F)$ des applications bilinéaires continues et symétriques de ExE dans F.

Preuve elle est un peu technique…

Montrons-le d'abord pour des fonctions d'un voisinage de (0,0) dans $\mathbf{R}^2 \to F$.

Lemme si g: $\mathbf{R}^2 \to F$ est deux fois dérivable en (0,0), alors, quand $h \to 0$,

$$g(h,h) - g(h,0) - g(0,h) + g(0,0) = h^2 \partial_x \partial_y g(0,0) + o(h^2)$$

Si on prouve ce lemme, alors en l'appliquant à la fonction G(x,y) = g(y,x) on voit que la même égalité est vraie avec $\partial_y \partial_x g(0,0)$, ce qui montre que

$\partial_x \partial_y g(0,0) = \partial_y \partial_x g(0,0) + o(1)$

et donc

$\partial_x \partial_y g(0,0) = \partial_y \partial_x g(0,0)$.

Pour revenir au théorème, il ne reste plus qu'à appliquer ça à g(x,y) =f(a + xu + yv). (Avec u et v quelconques dans E, (x,y) proche de 0 dans $\mathbf{R}^2$). On a (pour a+xu $\in$ V)

$\partial_y g(x,0) = Df(a + xu)\cdot v$;

c'est donc différentiable par rapport à x en x=0, et on a

$\partial_x \partial_y g(0,0) = [D(Df)(a)\cdot u] \cdot v = D^2 f(a)(u,v)$

et de même

$\partial_y \partial_x g(0,0) = [D(Df)(a)\cdot v] \cdot u = D^2 f(a)(v,u)$,

ce qui montre le théorème.

Preuve du lemme: Posons

$F(x,y) = g(x,y) - g(x,0) - g(0,y) + g(0,0) - y(\partial_y g(x,0) - \partial_y g(0,0))$

On a $F(x,0)=0$ et

$\partial_y F(x,y) = \partial_y g(x,y) - \partial_y g(0,y) - \partial_y g(x,0) + \partial_y g(0,0)$. (*)

On voit que seule la fonction $\partial_y g$ intervient. Cette fonction est différentiable en (0,0), et donc $\forall$ (x,y) on a

$\partial_y g(x,y) = \partial_y g(0,0) + D(\partial_y g)(0,0)\cdot(x,y) + o(x,y)$

On applique ça aux 4 termes de (*) et on obtient donc

$\partial_y F(x,y) = [1-1-1+1]\partial_y g(0,0) + D(\partial_y g)(0,0)\cdot [(x,y) - (0,y) - (x,0) - (0,0)] + o(x,y) = 0 + 0 + o(x,y)$

Donc par les accroissements finis appliqués à la fonction différentiable $y \to F(x,y)$

on a $\|F(x,y)\| = \|F(x,y) - F(x,0)\| \leq \sup \|\partial_y F\| |y| = \|o(x,y)\| |y|$

Donc $F(h,h) = o(h^2)$.

En remarquant que

$\partial_y g(x,0) - \partial_y g(0,0) = x\partial_x \partial_y g(0,0) + o(x)$

et en remplaçant le terme correspondant dans F, on obtient bien le lemme. CQFD

2) Applications de classe C^k

On rappelle que f est deux fois différentiable en a si f est différentiable au voisinage de a et Df est différentiable en a.

On peut ensuite se poser la question: est-ce que Df est deux fois différentiable en a ? Autrement dit, est-ce que Df est différentiable au voisinage de a et que D(Df) est différentiable en a ?

On dira alors que f est 3 fois différentiable en a.

Ainsi, par récurrence:

Définition On dit que f est **k fois différentiable en a** si f est différentiable au voisinage de a et que Df est (k-1) différentiable en a.

Dans ce cas, on définit alors les différentielles (ou dérivées) successives:

- $D^0 f = f$
- $D^j f = D(D^{j-1} f)$ pour $0<j<k$
- $D^k f(a) = D(D^{k-1}f)(a)$

On dira bien sûr que f est k fois différentiable si elle l'est en tout point de U.

Définition: On dit que f est $\mathbf{C^k}$ si elle est k fois différentiable et toutes ses dérivées $D^j f$, j=0,…,k sont continue. On dit que f est C^∞ si elle est $\mathbf{C^k}$ pour tout k.

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-12-06 mer. 12:53