CD - Cours 11

Table of Contents

Rappel:

> Théorème: (inversion locale) Soit f : U → F une application de classe C^1 d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. On suppose qu'en un point $a \in U$, la différentielle Df(a) est un isomorphisme de E sur F. Alors f est un C^1-difféo local en a.

Étape 1. on peut supposer a=0, f(a)=0 et Df(a) = Id (et donc F=E).

Étape 2. Montrons que f est un homéo local. C'est l'étape clef. Par l'étape 1, on peut supposer que U est un voisinage de 0, et, par différentiabilité en 0, f(x) = x + o(x). Posons F(x) := x - f(x). Du coup f = I - F, et on va essayer d'appliquer l'idée du théorème précédent, à la différence qu'on va devoir se limiter à une petite boule.

Fixons ρ>0 (à déterminer plus tard), ||y|| < ρ, et considèrons l'application

$$F_y : x \mapsto y + F(x)$$

Est-elle contractante ? $F_y(x) - F_y(x') = F(x) - F(x')$ et par les accroissements finis

$$||F(x) - F(x')|| \leq \sup ||DF|| ||x - x'||$$

Comme DF = I - Df et Df(0)=I, par continuité de Df, pour tout ε >0, il existe α>0 tel que dès que ||x|| <= α, on a || DF(x) || <= ε. Donc F (et de même, F_y) est ε-contractante sur la boule fermée $B_f(0,\alpha)$.

Quelle est l'image de F_y ? On a $||F_y(x)|| \leq ||y|| + ||F(x)|| \leq ||y|| + \varepsilon ||x||$ (car F(0)=0). Donc $\leq \rho + \varepsilon\alpha$. Donc F_y envoie la boule $B_f(0,\alpha)$ dans la boule $B_f(0,\rho+\varepsilon\alpha)$. Prenons par exemple ε=1/2 (ce qui détermine α), puis ρ=α/2. On obtient que F_y: $B_f(0,\alpha) \to B_f(0,\alpha)$ et est 1/2-contractante sur cette boule.

Cette boule est fermée dans E Banach donc est un espace métrique complet. On peut appliquer le point fixe de Picard: F_y admet un unique point fixe x: $F_y(x) = x$, et comme précédemment ça donne y = x - F(x) = f(x): tous les y dans B(0,ρ) admettent un unique antécédent par f dans $B_f(0,\alpha)$. Autrement dit, f réalise une bijection $\hat{f}$ de $X := f^{-1}(B(0,\rho)) \cap B_f(0,\alpha)$ sur B(0,ρ).

Pour y,y' dans B(0,ρ) et x,x' leurs antécédents par $\hat{f}$, on a, comme au théorème précédent:

$$||x - x'|| \leq ||y - y'|| + \epsilon||x - x'||$$

donc $||x - x'|| \leq (1 - \varepsilon)^{-1} || y - y' ||$, donc l'inverse $\hat{f}^{-1}$: y → x est Lipschitz donc continue. Donc $\hat{f}$ est un homéo de X dans B(0,ρ).

[Faire un dessin]. Cependant, X n'est pas nécessairement ouvert. Soit $U = f^{-1}(B(0,\rho)) \cap B(0,\alpha) \subset X$. C'est un ouvert contenant 0 (puisque f(0)=0) sur lequel la restriction

$$\hat{f}|_U : U \to f(U) = \hat{f}(U) \subset B(0,\rho)$$

est encore un homéo. Puisque $\hat{f}^{-1}$ est continue sur B(0,ρ), $f(U) = (\hat{f}^{-1})^{-1}(U)$ est ouvert dans B(0,ρ), et donc dans E.

Étape 3. On note f à la place de $\hat{f}|_U$ pour simplifier. Il reste à montrer que f^{-1} est différentiable sur f(U).

Écrivons, pour ||h|| assez petit:

$h = y+h - y = f(f^{-1}(y+h)) - f(f^{-1}(y))$

$= Df(x)\,(f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)) + o(|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)|)$

Comme f^{-1} est Lipschitz, le o est o(h).

Puisque Df(x) = I - DF(x) et || DF(x) || ≤ 1/2, on voit que Df(x): E→E est inversible. On peut donc composer par $(Df(x))^{-1}$ et on obtient

$f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}\,h + o(h)$

Ce qui prouve que f^{-1} est différentiable en x (et de différentielle $(Df(x))^{-1}$, ce qu'on savait déjà). Comme remarqué plus haut, cette différentielle est continue en x, donc f^{-1} est C^1.

<u>fin de la preuve !</u>

5) Théorème des fonctions implicites

C'est juste une variante de l'inversion locale mais c'est très utile ! Elle s'énonce comme ça:

> Soient E,F,G des espaces de Banach. Soit f: U → G une app C^1 définie sur un ouvert <u>U ⊂ E x F</u>.
>
> Soit $a_0 \in G$. Supposons qu'on veuille résoudre l'équation <u>$f(x,y) = a_0$</u> d'inconnue y, dépendant d'un paramètre x.
>
> Soient $x_0 \in E$, $y_0 \in F$ tels que $f(x_0,y_0) = a_0$. (Autrement dit, pour $x=x_0$, l'équation est résolue avec $y=y_0$).
>
> Supposons que $\partial_y f(x_0, y_0)$ soit inversible (F→G)
>
> Alors pour tout x proche de x_0, on peut résoudre l'équation pour un unique y = y(x) proche de y_0. Et l'application x → y(x) est C^1.

En résumé, on a trouvé une fonction x → y(x) telle que:

> Pour tout x proche de x_0, $F(x,y(x)) = a_0$.

En outre, on peut également varier a, et on a encore une unique solution locale (x,a) → y(x,a), qui est également C^1:

Pour tout x proche de x_0, et tout a proche de a_0, F(x,y(x,a)) = a.

Preuve appliquer le théorème d'inversion locale à l'application

F(x,y) = (x, f(x,y)) : U → E x G

1. Sous forme "matricielle" (par blocs dans ExF) on voit bien que $DF(x_0, y_0)$ est inversible.

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

   On peut aussi donner explicitement l'inverse: Si $DF(x_0, y_0)$ (h,k) = (u,v), alors h = u

   et $\partial_x f(x_{0,y0}) \cdot h + \partial_y f(x_{0,y0}) \cdot k = v$,

   donc $k = [\partial_y f(x_{0,y0})]^{-1} (v - \partial_x f(x_{0,y0}) \cdot h)$.

2. On remarque que l'inverse est forcément de la forme G : (x,z) → (x, y=g(x,z))
3. en l'appliquant à z=a, on écrit F(G(x,a)) = (x,a) soit pour la 2ème composante: f(x,g(x,a)) = a. L'unique solution est donc y(x) = g(x,a).

Pour bien se souvenir de la bonne hypothèse ($\partial_x f$ ou $\partial_y f$?) pensez à remplacer f par une fonction linéaire: f(x,y) = Ax + By. On a l'équation Ax + By = a, quelle est la condition pour "sortir y", càd exprimer y en fonction de x ? Clairement, il suffit que B soit inversible. C'est donc $\partial_y f$ qui doit être inversible.

Chap 6: Différentielles d'ordre supérieur

1) Applications deux fois différentiables

Soit U un ouvert de E, a∈ U et f : U → F une application différentiable sur un voisinage de a V.

On a donc Df : V → L(E,F)

On dit que f est **deux fois différentiable** en a∈ U si Df est différentiable en a.

Dans ce cas, D(Df)(x) ∈ L(E, L(E,F)). Quel est cet espace compliqué ?

Lemme L(E, L(E,F)) est isomorphe (par une isométrie linéaire) à l'espace L^2(E , F) des applications bilinéaires continues de ExE dans F.

Preuve: Si A ∈ L(E, L(E,F)) on définit l'application bilinéaire a:ExE→F par

a(u,v) = A(u)(v)

Réciproquement, si a bilinéaire est donnée, on définit A(u) = (v → a(u,v)).

Montrons l'isométrie:

On a (par définition) $||a|| = \sup_{(u,v)} ||a(u,v)||/ ||u|| \, ||v||$

donc $||a|| = \sup_{(u,v)} ||A(u)(v)|| / ||u|| \, ||v||$: c'est la plus petit constante c telle que on ait: $||A(u)(v)|| \leq c\ ||u||\ ||v||$ pour tous (u,v) (*)

D'autre part $||A||$ est la plus petite constante C telle que pour tous u, $||Au|| \leq C\ ||u||$. Pour tout v, $||(Au)(v)|| \leq ||Au||\ ||v|| \leq C\ ||u||\ ||v||$, donc $c \leq C$.

Mais par (*) en fixant u on voit que $||Au|| \leq c\ ||u||$, donc $C \leq c$. CQFD

Déf Si f est deux fois différentiable en a, on appelle différentielle seconde de f en a l'application bilinéaire continue $D^2 f(a) = D(Df)(a)$ donnée par l'isomorphisme ci-dessus: càd:

$$D^2 f(a)(u,v) = (D(Df)(a) \cdot u)(v)$$

Il se trouve que ce n'est pas n'importe quelle application bilinéaire: elle est toujours symétrique:

Théorème ("Lemme de Schwarz") Si f est deux fois différentiable au point a, sa dérivée seconde $D^2 f(a)$ appartient à l'espace $L^2_S(E, F)$ des applications bilinéaires continues et symétriques de ExE dans F.

Preuve elle est un peu technique…

Montrons-le d'abord pour des fonctions d'un voisinage de (0,0) dans $\mathbf{R}^2 \to F$.

Lemme si g(x,y) est deux fois dérivable en $(0,0) \in \mathbf{R}^2$ alors, quand $h \to 0$,

$$g(h,h) - g(h,0) - g(0,h) + g(0,0) = h^2 \partial_x \partial_y g(0,0) + o(h^2)$$

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-12-04 lun. 17:46