CD - Cours 10

Table of Contents

Chapitre 5 Difféomorphismes et inversion locale

1) Difféomorphismes

(…)

Rappel: difféo définition

Rappel: si $A \in L_c(E,F)$ est un isomorphisme, càd $A^{-1} \in L_c(F,E)$ et $y_0 \in F$, alors $f : x \to Ax + y_0$ est un difféomorphisme de E dans F (ou d'un ouvert U sur son image f(U)).

Rem: Il n'est pas toujours évident que l'image d'un ouvert par une application différentiable soit un ouvert, cf x^2. (Mais l'image d'un ouvert par un homéo est un ouvert)

Prop Si f est un diffeo $U \to V$, alors sa différentielle est inversible et la différentielle de f^{-1} est

$$D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

preuve on écrit $f^{-1}(f(x)) = x$ et on différentie en x:

$D(f^{-1})\ (f(x)) \cdot Df(x) = I$

Donc Df(x) est inversible à gauche (=injective)

De même on écrit $f(f^{-1}(y)) = y$ et on différentie en $y = f(x)$:

$Df(x) \cdot D(f^{-1})(y) = I$

Donc Df(x) est inversible à droite (surjective). Donc Df(x) est bijective. Et on a nécessairement

$D(f^{-1})\ (f(x)) = Df(x)^{-1}$

Remarque on a supposé f^{-1} différentiable, donc $D(f^{-1})\ (f(x))$ est une appli linéaire continue. donc $Df(x)^{-1}$ est une ALC aussi. (ce n'est pas automatique a priori si E,F ne sont pas des Banach et f est seulement différentiable et bijective.

Rappel TOPG? Dans un Banach E, si $A \in L_c(E)$ est de norme < 1, alors I-A est inversible. On en déduit que l'ensemble des **isomorphismes** (applications linéaires continues **inversibles**) forme un ouvert de $L_c(E)$

Preuve: montrer que l'inverse de I-A est $\sum_k A^k$ (série ACV donc convergente dans le Banach E). Cette série est appelée **série de Neumann**.

Prop Si E, F sont des Banach, l'application f: $A \to A^{-1}$ de $L_c(E,F)$ dans $L_c(F,E)$ est continue en tout A inversible.

Preuve cf TOPG (?) On fixe $A_0 \in L_c(E,F)$inversible. (Donc A_0^{-1} est dans $L_c(F,E)$). Il suffit alors de considérer l'application g: B -> B^{-1} sur un voisinage de I dans L(E). En effet si g est continue, alors $f(A)=g(A_0^{-1}A)A_0^{-1}$ est continue comme composée d'applications continues.

Pour g, on a $g(I-C) = (I-C)^{-1} = \sum_k C^k$ pour $||C||<1$. Chaque $C \to C^k$ est continue sur L(E) (rappel :on sait que $(A,B) \to AB$ est continue). Puisque $||C^k|| \leq ||C||^k$, la série est normalement convergente sur B(0,r) r<1, donc uniformément convergente. La somme est donc continue.

Rema: en utilisant le théorème de différentiation sous le signe somme, on voit que $A \to A^{-1}$ est C^1 (et même C^∞).

Coro Si f est un difféo entre ouverts d'espaces de Banach et f est C^1, alors f^{-1} est C^1 (c'est donc un "difféo C^1").

Preuve on applique la formule $D(f^{-1}) (y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$ et le corollaire, pour obtenir la continuité de $y \to D(f^{-1})(y)$ comme composée d'applications continue.

Si $f : U \to V$ et $g : V \to W$ sont des difféos, alors $f \circ g$ est un difféo.

Preuve: homéo+ composition d'applications différentiables…

2) Énoncé du théorème d'inversion locale

Définition On dit que $f:U \to F$ est un **difféo local** en $a \in E$ s'il existe un ouvert U' contenant a et un ouvert $V \subset F$ tel que la restriction de f à U' soit un difféo $U' \to V$.

Le fameux **théorème d'inversion locale** dit que, pour être un difféo C^1 local en a, il suffit que la différentielle en a soit inversible. (et on a vu plus haut que c'est nécessaire)

Théorème: (inversion locale) Soit $f : U \to F$ une application de classe C^1 d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. On suppose qu'en un point $a \in U$, la différentielle Df(a) est un isomorphisme de E sur F. Alors f est un C^1-difféo local en a.

Rem on peut (évidemment) prendre $U \subset X$ et $F:U\to Y$, espaces affines associés à des Banach.

Ce théorème repose sur un résultat de **point fixe**

3) Points fixes et applications contractantes

Définition une application $F:X\to X$ admet x comme **point fixe** si $F(x) = x$

(penser au "système dynamique" $x_{n+1} = F(x_n)$)

Définition: une application **contractante** (ou "contraction stricte") sur un espace métrique X est une application $F : X \to X$ Lipschitzienne de rapport $\mathrm{Lip}\, F < 1$

Théorème (point fixe de Picard, cf TOPG, ou "lemme de contraction") Soient X un espace métrique **complet** et $F : X \longrightarrow X$ une application **contractante**. Alors F a un unique point fixe $a \in X$, et pour tout $x\in X$ la suite $F^n(x)$ converge vers a.

Le théorème du point fixe peut servir à inverser des applications ! En effet, on remarque que, étant donné un point y, trouver un point fixe de l'application $x \to y + F(x)$ revient à trouver un x tel que

$y = x - F(x) = (I - F)(x)$

Si x est unique, I-F est bijective.

On remarque aussi que $x \to y + F(x)$ est aussi contractante que F !

Théorème: (Inversion globale Lipschitzienne) Pour toute F contractante (pas forcément linéaire!) sur un espace de Banach E, l'application I - F est bijective et son inverse est lipschitzienne. Plus précisément, en posant

$F_y(x) = y + F(x)$

on a:

- $\forall$ y, $a\in E$, on a les mêmes constantes de Lipschitz: $\mathrm{Lip}\, F_y = \mathrm{Lip}\, F$
- $\mathrm{Lip}((I - F)^{-1}) \leq (1-\mathrm{Lip}\, F)^{-1}$

preuve: Par la remarque précédente, puisque F est contractante, on peut appliquer le théorème du point fixe, ce qui donne la bijectivité de I-F, et la formule de la limite.

Si $y = (I-F)(x)$ et $y' = (I-F)(x')$ on a donc $x = y + F(x)$ et idem $x' = y' + F(x')$

donc $| x - x'| = |y - y' + F(x) - F(x')| \leq |y - y'| + \mathrm{Lip}(F)\, |x - x'|$

ce qui donne $| x - x'| \leq (1 - \mathrm{Lip}(F))^{-1}\, |y - y'|$

4) Preuve du théorème d'inversion locale

Étape 1. on peut supposer a=0, f(a)=0 et Df(a) = Id (et donc F=E). En effet T_a = translation(a) : x -> x + a est un difféo, donc il suffit de mq f o T_a est un difféo g; dans ce cas, f = g o T_{-a} sera un difféo par composition. ça remplace a par 0.

De même on compose à gauche par $T_{-f(a)}$: il suffit de mq $T_{-f(a)} \circ f$ est un difféo. Ça remplace f(a) par 0.

Enfin, on compose par x -> Ax, où A = $(Df(a))^{-1}$: F → E Il suffit de mq que A o f est un difféo, d'un voisinage de 0 dans E dans un voisinage de 0 dans E.

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-11-22 mer. 15:06