CD - Cours 09

Table of Contents

Chapitre 4 Chemins dans un espace de Banach

1) Suites de Cauchy dans un EVN, Banach (TOPG)

2) Intégrale des chemins dans un Banach

Rappel:

> theo Formule de la moyenne: (théorème fondamental du calcul infinitésimal) Soit I un intervalle de R. E un Banach. Pour f: I –> E continue sur I, et C^1 (par morceaux), et a,b dans I:
>
> $$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt$$

Rem c'est encore valable si f: I –> X où (X,E) est un espace affine sur E. (Rappel: f'(t) ∈ E dans tous les cas.)

Changement de variables (reparamétrisation du chemin): cf TD 08

Longueur d'un arc cf TD 08

rappel cours 6: segment

On rappelle qu'un **segment** [a,b] dans X affine c'est { a + t(b-a) , t∈[0,1] }.

On obtient alors

> Prop (formule de la moyenne, bis) Soient (X,E) et (Y,F) deux espaces affines normés, et f : U –> Y une application différentiable d'un ouvert U de X. On suppose que F est un Banach. Soient a et b deux points de U tels que le segment [a, b] soit contenu dans U. Alors
>
> $$f(b)-f(a)=\int_0^1 Df(a+t(b-a))\cdot(b-a)dt$$

preuve poser g(t) = f(a+t(b-a)) pour t∈[0,1] et appliquer la formule de la moyenne.

Rem: On retrouve directemen le TAF cours 6. Cependant ici on a dû supposer Banach.

Prop Intégration par parties Si g:I–> **R** et f : I –> E Banach sont C^1, alors

$\int_a^b g(t)\cdot f'(t)\,dt = [g(t)\cdot f(t)]_a^b - \int_a^b g'(t)\cdot f(t)\,dt$

preuve appliquer la formule de la moyenne à (t -> g(t)·f(t))

3) Formules de Taylor avec reste intégral

Théorème Taylor avec reste intégral

Soit f: I –> E un chemin C^{k+1}, k∈ **N**, dans un espace de Banach E. Soit t∈ I et h∈ **R** tel que t+h ∈ I. Alors

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(t) + h^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(t+sh)ds$$

preuve: pour k=0, c'est la formule de la moyenne.

Puis, on remarque que, par intégration par parties: avec $g(s) = -\frac{(1-s)^j}{j!}$, $g'(s) = \frac{(1-s)^{j-1}}{(j-1)!}$:

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j)}(t+sh)ds = \frac{1}{j!} f^{(j)}(t) + h \int_0^1 \frac{(1-s)^j}{j!} f^{(j+1)}(t+sh)ds,$$

ce qui permet de faire la récurrence.

Rem: comme d'habitude, on aurait pu faire entrer le terme f(t) dans la somme en débutant à j=0, mais on le présente comme ça pour mieux voir que la formule s'étend au cas affine: f(t)∈ X, et le "reste" est un vecteur dans E.

4) interversion limite/dérivée

Définition: On dit qu'un ensemble U ∈ X est **convexe** si ∀ a,b∈ X, le segment [a,b] est contenu dans X.

Théo Soient U un ouvert **convexe** d'un espace vectoriel normé E, F un espace de **Banach**, et (f_n, n ∈ **N**) une suite d'applications différentiables de U dans F, vérifiant les deux propriétés suivantes :

- il existe un point a ∈ U tel que la suite (f_n(a)) converge;
- la suite (Df_n) converge uniformément sur U vers une application g : U -> L(E, F).

Alors, pour tout x ∈ U, la suite (f_n(x)) converge vers un élément, noté f(x), de F, la convergence étant uniforme sur toute partie bornée de U. De plus, l'application f : U -> F ainsi obtenue est différentiable sur U, et sa différentielle n'est autre que g.

Preuve faisons le cas $f_n \in C^1$ (pour le cas simplement différentiable, cf Marle Théo 5.8 p20) On a

$f_n(x) = f_n(a) + \int_0^1 Df_n(a+t(x-a))\cdot(x-a)\, dt$

Le terme $f_n(a)$ converge par hypo. Notons f(a) la limite.

la suite de fonctions ($t \to Df_n(a+t(x-a))\cdot(x-a)$) converge uniformement sur [0,1] vers $g(a+t(x-a))\cdot(x-a)$.

Donc, par continuité de $f \to \int_0^1 f$ pour la norme uniforme, le terme intégral converge vers $\int_0^1 g(a+t(x-a))\cdot(x-a)\, dt$.

Donc $f_n(x)$ converge vers $f(x) := f(a) + \int_0^1 g(a+t(x-a))\cdot(x-a)\, dt$.

Puisque $f_n(x)$ converge, le même raisonnement en remplaçant a par x donne, pour tous (x,y),

$f(y) := f(x) + \int_0^1 g(x+t(y-x))\cdot(y-x)\, dt$.

En notant y=x+h on trouve

$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 g(x+th)\cdot h\, dt$.

On sait que g est continue en x car Df_n est continue. donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\alpha>0$ tel que si $|h| < \alpha$, $\| g(x+th) - g(x) \| < \varepsilon$. Du coup

$$||f(x+h) - f(x) - g(x)\cdot h|| < \epsilon ||h||$$

autrement dit $f(x+h) - f(x) - g(x)\cdot h = o(h)$, donc f est bien différentiable de différentielle g.

Chapitre 5 Difféomorphismes et inversion locale

1) Difféomorphismes

Défi. - Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et f une application de U dans F. On dit que f est un **difféomorphisme** de U sur un ouvert V de F, si f est différentiable sur U, est une bijection de U sur V, et si l'application réciproque $f^{-1} : V \to E$ est différentiable sur V. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^1 si f est un difféomorphisme, et si f et f^{-1} sont de classe C^1

Rem: Un difféomorphisme de U sur V est évidemment un **homéomorphisme** de U sur V. Mais un homéomorphisme différentiable d'un ouvert U de E sur un ouvert V de F n'est pas nécessairement un difféomorphisme. Ainsi par exemple, l'application de R sur lui-même $x \to f(x) = x^3$, qui est différentiable, est un homéomorphisme. Cependant, l'application réciproque $y \to f^{-1}(y) = y^{1/3}$ n'est pas différentiable à l'origine.

Exemple: si $A \in L_c(E,F)$ est inversible (càd bijective et $A^{-1} \in L_c(F,E)$ et $y \in F$, alors $x \to Ax + y$ est un difféo.

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-11-08 mer. 18:33
Validate