CD - Cours 08

Table of Contents

Chapitre 4 Chemins dans un espace de Banach

1) Suites de Cauchy dans un EVN, Banach (TOPG)

Déf: (u_n) une suite dans un EVN. On dit que (u_n) est de Cauchy si:

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ dès que n et m sont $\geq$ N.

Déf: Un espace de Banach est un EVN **complet**, c'est-à-dire un evn où toute suite de Cauchy est convergente.

Rem La notion de suite de Cauchy s'adapte parfaitement au cas d'un **espace affine normé** (X,E). En effet $u_n - u_m$ est toujours un vecteur de E.

Rem (*) il y a **deux** généralisations possibles de suites de Cauchy/espaces complets.

- suites de Cauchy dans un EVT (hors programme)
- suites de Cauchy dans un Esp Métrique (TOPG)

2) Intégrale des chemins dans un Banach

Sommes de Riemann Soit E un evn. Soit $f:[a,b] \to E$ une fonction continue. On se donne une subdivision (t_i) de [a,b]: on prendra en général un pas constant $h = (b-a)/N$, et donc $t_i = a + ih$, avec $i = 0,\ldots,N$, de sorte que $t_0 = a$, $t_N = b$, et il y a N sous-intervalles.

Def Soit f:[a,b] –> E. la **somme de Riemann** de f pour la subdivision $t_i = a + i(b-a)/n$ est

$$S_N(f) = \sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{i-1})f(t_i) = \sum_{i=1}^{N} hf(t_i) = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(t_i)$$

On montre alors:

Prop Si $f:[a,b] \to E$ est continue, la somme de Riemann $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E.

Preuve: on considère donc la différence $S_N(f)$ - $S_M(f)$. Notons x_i la subdivision dans $S_N(f)$, donc $x_i = a + (i/N)(b-a)$ et y_j la subdivision dans $S_M(f)$, donc $y_j = a + (j/M)(b-a)$

Notons (t_k) la subdivision (non régulière) obtenue en prenant l'union des (x_i) et des (y_j) (avec répétition le cas échéant: k varie de 0 à M+N+1, et on a $t_k \leq t_{k+1}$), et notons $S_{N,M}(f)$ la somme de Riemann correspondante:

$$S_{N,M}(f) = \sum_{k=1}^{N+M+1} f(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

On regroupe les t_k qui tombent dans les intervalles $]x_{i-1}, x_i]$: on a donc

$$S_{N,M}(f) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t_k \in]x_{i-1},x_i]} f(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

Comparons maintenant $S_N(f)$ et $S_{N,M}(f)$:

$$S_N(f) - S_{N,M}(f) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{b-a}{N} f(x_i) - \sum_{t_k \in]x_{i-1},x_i]} f(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right)$$

On remarque qu'en sommant la longueur des sous-intervalles on obtient la longueur de $]x_{i-1}, x_i]$:

$$\sum_{t_k \in]x_{i-1},x_i]} (t_k - t_{k-1}) = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{N}$$

et du coup la somme précédente se réécrit en

$$S_N(f) - S_{N,M}(f) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{t_k \in]x_{i-1},x_i]} (f(x_i) - f(t_k))(t_k - t_{k-1}) \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par **continuité uniforme** de f sur le compact [a,b] (Théorème de Heine), si N est assez grand, $||f(x) - f(y)|| < \varepsilon/2(b-a)$ lorsque $|x-y| < (b-a)/N$. C'est donc le cas pour tous les $||f(x_i) - f(t_k)||$ qui apparaissent dans la somme.

Donc

$$||S_N(f) - S_{N,M}(f)|| \leq \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{t_k \in]x_{i-1},x_i]} \frac{\epsilon}{2(b-a)} (t_k - t_{k-1}) \right) = \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{N} \frac{b-a}{N} = \epsilon/2.$$

Bien sûr, la même estimation est valable aussi pour $|| S_M(f) - S_{N,M}(f) || \leq \varepsilon/2$ si M est également assez grand. On obtient finalement, pour N et M assez grands:

$$||S_M(f) - S_N(f)|| \leq ||S_M(f) - S_{N,M}(f)|| + ||S_{N,M}(f) - S_N(f)|| \leq \epsilon.$$

La suite est donc bien de Cauchy.

- Rem: Si f dépend d'un autre paramètre s de sorte que $(t,s) \to f(t,s)$ est continue, alors la preuve est encore valable uniformément pour s dans tout compact: en effet il suffit d'invoquer la continuité uniforme de f(t,s). La suite $S_N(f(\cdot,s))$ est alors uniformément de Cauchy par rapport à s dans un compact.

On obtient donc:

Théorème-définition Soit I un intervalle de **R**, et soit f:I –> E un **chemin** (donc continu) dans un espace de **Banach** E. Soient a,b dans I. La somme de Riemann $S_N(f)$ associée est une suite de Cauchy dans E donc converge, et on définit:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt := \lim_{N\to\infty} S_N(f)$$

Remarques:

- on peut montrer que de la même façon que la limite de la somme de Riemann "générale" $S_N(f) = \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1})f(t_i)$ ne dépend pas de la subdivision (t_i) choisie, tant que les pas tendent uniformément vers 0, càd $\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$ quand N –> ∞.
- Si b < a, la même formule pour la somme de Riemann fonctionne (avec h < 0) et on obtient $\int_a^b f = -\int_b^a f$
- Si f dépend continuement d'un autre paramètre s (voir remarque ci-dessus), alors la convergence de $S_N(f)$ est uniforme pour s dans tout compact K:

$$\sup_{s\in K} ||S_N(f(\cdot,s)) - \int_a^b f(\cdot,s)|| \to 0 \qquad \text{quand } N\to\infty.$$

Exo **relation de Chasles** $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$. (il faut utiliser l'indépendance de la subdivision, cf remarque ci-dessus)

Def On étend l'intégrale aux fonctions **continues par morceaux** de façon habituelle: on somme les intégrales sur chaque intervalle où f est continue de façon à satisfaire la relation de Chasles.

On récupère facilement les propriétés habituelles de l'intégrale, par exemple:

- $\int_a^a f = 0$
- si $x_0 \in E$, l'intégrale de la fonction constante: $\int_a^b x_0 = (b-a)\cdot x_0$

et aussi:

prop On a $|| \int_a^b f(t)dt|| \le \int_a^b ||f(t)||dt$. L'application $C^0([a,b],E) \ni f \to \int_a^b f \in E$ est linéaire continue de norme |b-a|. (si E ≠ {0})

preuve:

- La linéarité de l'intégrale provient de la linéarité de f –> $S_N(f)$, qui est préservée par passage à la limite.
- $|| \int f || = || \lim S_N(f) || = \lim || S_N(f) || \le \lim |S_N(g)|$, où g est la fonction g(t) = ||f(t)||. Or $\lim S_N(g) = \int g$, on obtient donc bien $|| \int f || \le |\int g|$.
- Du coup $|| \int f|| \le | \int \sup g| = |b-a|||g||_\infty$. Et cette norme est facilement atteinte avec une fonction constante.

Exo (TD) L'espace C([a,b]; E), muni de la norme L1: $\|f\|_1 = \int_a^b \|f(t)\|\, dt$, est un evn non complet (si a<b et E $\neq \{0\}$).

prop si A est $L_c(E,F)$, $\int (Af) = A (\int f)$

preuve: $\int (Af) = \lim S_N(Af) = \lim A (S_N(f))$ par linéarité de A, c'est $= A(\lim S_N(f))$ par continuité de A, c'est donc $= A(\int f)$.

theo Formule de la moyenne: (théorème fondamental du calcul infinitésimal) Soit I un intervalle de R. E un Banach. Pour f: I –> E continue sur I, et C^1 (par morceaux), et a,b dans I:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

preuve: Montrons le lemme:

lemme: Si g est continue par morceaux, la fonction G: $t \to \int_a^t g$ est continue. Si g est continue en t, G est différentiable en t, de dérivée G'(t) = g(t).

En effet, la continuité provient du fait que $\|g(t)\|$ est bornée pour t dans tout compact. Du coup G est lipschitz.

pour la différentiabilité, on considère:

$$G(t+h) - G(t) = \int_t^{t+h} g(s)ds = hg(t) + \int_t^{t+h} (g(s) - g(t))ds$$

(par Chasles). Par continuité de g en t, si $|h|$ est assez petit, $\|g(s) - g(t)\| < \varepsilon$, donc $\| \int_t^{t+h} (g(s) - g(t))\, ds \| < h\varepsilon$. Autrement dit, ce terme est o(h) lorsque h –> 0, ce qui prouve le lemme.

preuve du théoreme: la fonction $F(t) = f(t) - f(a) - \int_a^t f'$ a donc une dérivée nulle. Par le théorème des accroissements finis, cette fonction doit être constante sur tout intervalle où elle est continue.

Donc F(b) = F(a) = 0, ce qui donne le résultat.

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-11-09 jeu. 11:28