CD - Cours 07

Table of Contents

Attention 1h de cours seulement, 30min QCM en fin de séance.

8) Applications définies sur un ouvert d'un produit.

…

<u>Théorème</u> Soit f une application continue d'un ouvert U d'un produit $X = X_1 \times \dots \times X_n$ de n espaces affines normés (X_i, E_i), dans un espace affine normé (Y, F). L'application f est de classe $\mathbf{C^1}$ sur U si et seulement si les n différentielles partielles de f existent en tout point de U et sont des applications continues de U dans L(Ei , F), 1 < i < n.

<u>preuve</u> cas n=2. (puis faire par récurrence)

1. Si f est C^1 en $a=(a_1 ,\dots, a_n)$, montrons que les différentielles partielles sont continues: on rappelle que la ième diff partielle de f en a est la différentielle en a_i de $f \circ j_i$ avec

   $$j_i(x_i) = (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

   On rappelle aussi que j_i est affine donc différentiable et $Dj_i(x_j)$ est l'application (indépendante de x_j) d'injection de E_i dans le produit:

   $$\tilde{\jmath}_i : h_i \mapsto (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0) \in E_1 \times \dots \times E_n$$

   Donc

   $$\partial_j f(a) = Df(a) \circ \tilde{\jmath}_i$$

   qui est bien continue en a, car on a vu (exemple 2 au cours précédent) que l'application de composition bilinéaire $C : (A, B) \mapsto A \circ B$ est continue.

2. <u>Réciproque:</u>

   Supposons que les diff partielles existent et sont continues: on a alors un candidat nécessaire pour la diff de f, qui est

   $g(x)(v) = \partial_1 f(x) \cdot v_1 + \partial_2 f(x) \cdot v_2$.

   Pour chaque x c'est une appl linéaire continue (par composition, car la projection p_j: v –> v_j est continue) et l'app x –> g(x) est continue, car le premier terme se factorise en:

   x –> $(\partial_1 f(x), p_1)$ –> composition $C(\partial_1 f(x), p_1) = \partial_1 f(x) \circ p_1$

   (et idem pour le 2ème terme).

   On considère maintenant f(x+h) - f(x) - g(x)(h): On voudrait montrer que c'est o(h).

   On a (dessin en carré)

   $f(x+h) - f(x) - g(x)(h) = f(x+h) - f(x1, x2+h2) - D_1 f(x)(h1) + f(x1, x2+h2) - f(x) - D_2 f(x)(h2)$.

Donc ||f(x+h) - f(x) - g(x)(h) || ≤ N1 + N2

avec N1 = ||f(x+h) - f(x1, x2+h2) - D_1 f(x)·(h1) ||

et N2 = ||f(x1, x2+h2) - f(x) - D_2 f(x)·(h2)||

Par le fait que les dérivées partielles existent, ce dernier terme N2 est o(h2). Pour tout ε on a un α tel que

N2 < ε || h_2 ||

dès que || h_2 || < α.

Mais pour le premier terme N1 on n'est pas exactement au bon point… on a D_1 f(x) et on voudrait D_1 f(x1,x2+h2). Il faut utiliser la continuité de D_1 f. Notons $\tilde{x} = (x_1, x_2 + h_2)$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de $D_1 f$ on a un $\alpha > 0$ tel que

$$||D_1 f(x) - D_1 f(\tilde{x})|| < \epsilon$$

dès que $||x - \tilde{x}|| < \alpha$. Par définition de la norme subordonnée, on a donc

$$||D_1 f(x) \cdot h_1 - D_1 f(\tilde{x}) \cdot h_1|| < \epsilon ||h_1||.$$

Donc

$$N1 = ||f(x+h) - f(\tilde{x}) - D_1 f(x) \cdot h_1|| \leq ||f(x+h) - f(\tilde{x}) - D_1 f(\tilde{x}) \cdot h1|| + ||D_1 f(x) \cdot h_1 - D_1 f(\tilde{x}) \cdot h_1||$$

Le premier terme est o(h_1) par existence de $D_1 f(\tilde{x})$, donc N1 < 2ε || h_1 || si ||h_1|| est assez petit.

On a donc N1 + N2 ≤ 2ε (||h_1|| + ||h_2||) pour h assez petit, ce qui dit bien N1 + N2 = o(h), CQFD.

Autre preuve: on remarque que N1 = || F(h_1) - F(0) || avec h2 fixé et

F : h1 -> f(x1+h1,x2+h2) - D_1 f(x1,x2)·(h1),

F elle est différentiable (pourquoi ?) et DF1(h1) = D_1 f (x1+h1,x2+h2) - D_1 f(x1,x2) qui est majoré en norme par ε si ||h|| est assez petit. Donc par les accroissements finis:

$$||F(h_1) - F(0)|| \leq \epsilon ||h_1||$$

(si h est petit le segment [0,h1] est dans le domaine de F)

Soit: N1 ≤ ε || h_1 ||

9) Dimension finie

1. dérivées partielles

On considère la différentielle d'une fonction scalaire f: U -> R, U ouvert de R^n.

Si f = f(x) = f($x_{1,\ldots,xn}$) on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ la ième différentielle partielle (qu'on appelle **dérivée partielle**). On note souvent df au lieu de Df pour la différentielle.

En géo diff, on note aussi "x_i" l'application "ième coordonnée": $x_i(x) = x_i$… C'est la projection π_i sur le ième facteur. c'est linéaire, donc sa différentielle dx_i est égale à elle-meme π_i. On a donc

$$\boxed{df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i}$$

Rem df(x) se voit comme un "vecteur ligne" pour calculer df(x)·h où h est un vecteur colonne

2. matrice jacobienne.

   On se donne encore U ouvert de R^n et on considère maintenant

   f: U –> R^m = (f_1, … , f_m)

   Donc Df = (df_1, …, df_m) on a m vecteurs lignes dans R^n ==> on a une matrice n x m

   ```
   ( df_1 )
   (  .   )
   (  .   )
   ( df_m )
   ```

   <u>def</u> **Matrice jacobienne de f**

   $$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

   i = ligne parmi m, j = colonne parmi n

   Dans ce cas pour calculer Df(x).h on fait le produit matriciel de la matrice jacobienne avec h. On n'a donc en général pas de notation pour la matrice jacobienne, on utilise simplement "Df(x)"… et donc Df(x)(h) = Df(x) · h = produit matrice x vecteur colonne

3. Déterminant jacobien

   J(x) = det (matrice jacobienne)

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-10-25 mer. 16:17
Validate