CD - Cours 06

Table of Contents

Rappel la semaine prochaine QCM en fin de cours

essentiellement chap 1 et 2, un peu chapitre 3

6) Applications à valeurs dans un produit

Prop f :U –> Y x Z est différentiable si et seulement si ses composantes π_Y o f et π_Z o f le sont.

preuve Soient E,F,G les EV associés. On peut mettre sur F x G la norme du sup. (max normeF, normeG)

Notons f = (f1, f2)

Pour h ∈ E, on a f(a+h) = (f1(a+h), f2(a+h)) = (f1(a), f2(a)) + (Df1(a)·h + o(h), Df2(a)·h + o(h)) = f(a) + A·h + o(h)

avec A l'appli linéaire h –> (Df1(a)·h, Df2(a)·h). Cette applic est continue de norme ≤ max (||Df1(a)|| , ||Df2(a)||). donc f est différentiable en a et Df(a) = A.

7) Théorème des accroissements finis

Définition Soient a et b deux points d'un espace affine normé X. On appelle **segment** d'extrémités a et b, et on note [a, b], l'ensemble

[a, b] = { a + t(b - a) ; 0 ≤ t ≤ 1 } ⊂ X

Théorème Soient (X,E) et (Y,F) deux espaces affines normés, et f : U –> Y une application différentiable d'un ouvert U de X. Soient a et b deux points de U tels que le segment [a, b] soit contenu dans U. Alors l'application f vérifie

$$||f(b) - f(a)||_F \leq \sup_{z\in[a,b]} ||Df(z)||_{L(E,F)}\, ||b-a||_E$$

Coro si U est convexe et s'il existe un réel M > 0 tel que, pour tout x ∈ U, ||Df(x)|| ≤ M, alors pour tout couple (a, b) de points de U, on a || f(b) - f(a) || ≤ M ||b - a||.

Preuve: Considérons le chemin tracé dans Y : [0, 1] ∋ t –> φ (t) = f(a + t(b - a)) . C'est un chemin différentiable en tout point t ∈]0, 1[et de différentielle φ' (t) = Df (a + t (b - a)) · (b - a).

Nous avons donc, pour tout t ∈]0, 1[,

$$||\phi'(t)|| \leq ||Df(a+t(b-a))||\ ||b-a|| \leq C||b-a||$$

avec C = sup $||Df(z)||_{z \in [a,b]}$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis pour les chemins, avec

g(t) = tC || b - a ||

on obtient || φ(1) - φ(0) || ≤ g(1) - g(0) CQFD.

8) Applications définies sur un ouvert d'un produit.

On se donne X_1, X_2, Y des EAN et **U un ouvert de X_1 x X_2**.

E_1, E_2, F les evn associés.

On se donne f : U -> Y

On notera x=(x1,x2) et f(x) = f(x1,x2)

Def Soit a=(a1,a2) dans U.

1. Si l'application x1 –> f(x1, a2) est différentiable, on dit que sa différentielle est la **différentielle partielle** de f par rapport à x1 au point a. On la notera D_{x1} f (a) ∈ L(E1,F). Ou parfois D_1 f (a) ou ∂_{x_1} f (a)
2. Si l'application x2 –> f(a1, x2) est différentiable, on dit que sa différentielle est la **différentielle partielle** de f par rapport à x2 au point a. On la notera D_{x2} f (a) ∈ L(E2,F). Ou parfois D_2 f (a) ou ∂_{x_2} f (a)

Bien sûr on généralise à un nombre fini quelconque de facteurs X_i

Prop si f est diff en a = (a1, a2) alors f admet des différentielles partielles par rapport à ses deux variables et on a, pour h = (h1, h2) ∈ E1 x E2 :

$$Df(a) \cdot h = D_1 f(a) \cdot h1 + D_2 f(a) \cdot h2$$

preuve Pour a fixé, l'application x1 –> f(x1, a2) s'écrit aussi $f \circ j_1$ où j_1 (x_1) := (x_1, a_2). j_1 est affine donc différentiable, et (exercice) Dj_1 (a_1) est l'application linéaire h_1 –> $(h_1, 0)$. Donc par composition $f \circ j_1$ est diff et sa différentielle est

$$\partial_{x_1} f(a) = D(f \circ j_1)(a_1) = Df(a) \circ Dj_1(a_1) = [(h_1, h_2) \mapsto Df(a) \cdot (h_1, 0)]$$

En écrivant Id = Dj_1 + Dj_2, on a Df(a) = Df(a) o Dj_1 + Df(a) o Dj_2 et donc la formule annoncée.

Rem on généralise à n facteurs

Exemple.

1. diff d'une forme bilinéaire

   f : ExF –> R bilinéaire. Montrer que f est différentiable et que, pour

   a=(a_1 , a_2) ∈ ExF, h =(u,v) ∈ E x F, on a

$Df(a)(u,v) = f(a_1, v) + f(v, a_2)$

2. E un evn. Soit $E \ni x \to A(x)$ dans $M_n(\mathbf{R})$ et $x \to B(x)$ dans $M_n(\mathbf{R})$. Quelle est la différentielle de $F:x \to A(x)\, B(x)$? (produit matriciel)

   On l'écrit C o f(x) avec f(x) = (A(x), B(x)) et C(A,B) = AB.

   C est bilinéaire et donc diff, avec $DC(A,B) = C(A,\cdot) + C(\cdot,B)$

   f est diff (par composante) et Df(x) = (DA(x), DB(x)) où DA(x): $E \to M_n(\mathbf{R})$

   Donc $DF(x) = DC(C(F(x)))$ o $DC(F(x))\ (u) = C(DA(x)\cdot u, B(x)) + C(A(x), DB(x)\cdot u) = (DA(x)\cdot u)(B(x)) + (A(x))(DB(x).u)$

   Pour n = 1 on retrouve la formule de Leibniz

   La même preuve fonctionne pour $A(x) \in L(F,G)$ et $B(x) \in L(E,F)$

Attention la récip de la proposition est fausse. Par exemple $f(x,y) = xy /(x^2 + y^2)$ et 0 en (0,0): les applications partielles en (0,0) sont nulles donc dérivables, mais f n'est pas continu en 0 donc pas diff. Mais sur un **ouvert** ça marche:

Théorème Soit f une application continue d'un ouvert U d'un produit $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ de n espaces affines normés X_i (d'EV E_i), dans un espace affine normé Y (d'EV F). L'application f est de classe $\mathbf{C^1}$ sur U si et seulement si les n différentielles partielles de f existent en tout point de U et sont des applications continues de U dans L(Ei , F), 1 < i < n.

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-11-06 lun. 13:51