CD - Cours 05

Table of Contents

- Chapitre 3 Différentielle d'une application f:E->F
  - 1. applications tangentes à 0
  - 2) applications différentiables U->Y, différentielle E->F (Fréchet)
  - 3) Dérivées directionnelles (Gateaux)
  - 4) Différentielle d'une application composée
  - 5) Linéarité de diff
  - 6) Applications à valeurs dans un produit

Chapitre 3 Différentielle d'une application f:E->F

On adapte facilement les définitions qu'on a vues pour f: I –> E, mais on va voir que ça se complique malgré tout… surtout pour les dérivées d'ordre supérieur.

On se donne deux espaces affines normés X et Y (donc X=x+E et Y=y+F, où E et F sont les evn associés). On rappelle (TOPG) que E et F sont munis d'une topologie (engendrée par les boules ouvertes.) Comme E est homéo à X par l'applic u –> x_0 + u, on a la même topologie sur X (également engendrée par les boules ouvertes). On se donne un ouvert U de X. (par exemple U = une boule ouverte). On se donne f: U -> Y.

Commment définir la "dérivée" de f ?

notion d'accroissement de f(x): mais dans quelle direction ? (x bouge dans U)

1. applications tangentes à 0

Déf g : U –> F, $x_0 \in$ U. On dit que g est tangente à 0 en x_0 (à l'ordre 1) si ‖ g (x) ‖ = o (‖ x - x0 ‖)

En particulier, g est continue en x_0 et g(x_0) = 0.

Déf: f1 est tangente à f2 si (f2 - f1) est tangente à 0

Prop Une application linéaire A : E –> F est tangente à 0 en 0 si et seulement si elle est nulle.

preuve: Supposons A tangente à 0 en 0. Fixons y ≠ 0. Soit ε > 0. Par déf, il existe α > 0 tel que ‖ x - 0 ‖ < α ==> ‖ A (x) ‖ < ε ‖ x ‖. Si on pose x = (α/2) y/‖y‖ on a bien ‖ x ‖ < α, donc par homogénéité,

$$\frac{\alpha}{2||y||}||A(y)|| < \varepsilon\frac{\alpha}{2||y||}||y||$$

donc ‖A(y)‖ ≤ ε‖y‖

Comme c'est vrai pour tout ε, pour ce y fixé, on en déduit que A(y)=0. CQFD.

Rem: à partir de $||A(y)|| \le \varepsilon||y||$, on pourrait aussi en déduire que A est continue (dans L(E,F)) de norme < ε, donc au final de norme 0…

2) applications différentiables U->Y, différentielle E->F (Fréchet)

Soient X,Y des EAN, U un ouvert de X.

Déf: Soit f: U -> Y, a ∈ U. On dit que f est **différentiable en a** s'il existe une application linéaire continue A: E -> F telle que f est tangente à l'application affine x -> f(a) + A(x-a). En formule:

$$f(a+h) - f(a) = A(h) + o(||h||), \qquad h \to 0$$

On appelle A **différentielle** de f en a. On dit aussi différentielle de Fréchet.

Prop différentiable -> continue

Prop Si f est diff en a, la différentielle A est unique. On la note Df(a) ou f'(a) ou T_a f ("application linéaire Tangente"). Je préfère réserver f'(a) au cas scalaire F=R.

preuve: Si B est une autre différentielle, alors h -> Ah et h -> Bh sont tangentes en h=0, donc (A-B) est tangente à 0 en 0, donc A-B=0 par la proposition précédente.

Problème embêtant Rappel: Df(a) est une applica linéaire de E –> F. Comment noter l'application de Df(a) au vecteur h?

Df(a)(h) ? Df(a)·h ? Df(a)h ? T_a f(h) ? d_a f (h)? f'(a)(h) ? L_h f(a) ? etc.

Tout est admissible…! il faudra bien faire attention de distinguer le "point" a du "vecteur" h.

Retour au cas X = **R**. On avait défini f'(a) ∈ F. Comment réconcilier les définitions? En les comparant, on voit que A(h) = h· f'(a). Autrement dit f'(a) est en fait vu comme l'application linéaire de **R** dans F donnée par: $h \mapsto h \cdot f'(a)$. On a identifié F et L(**R**,F) de façon naturelle f'(a) = A(1). ("1" est la "base canonique" de **R**)

Déf on dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U. L'application $a \mapsto Df(a)$, U → L(E,F), est la **différentielle de f**.

Déf on dit que f est $\mathbf{C^1}$ si sa diff est continue (donc de U dans L(E,F)).

Attention l'application linéaire Df(a) est toujours continue E –> F par définition. Pour C^1 on demande que a –> Df(a) soit continue de U -> L(E,F) avec la norme subordonée définie au chapitre précédent.

Rappel: les app linéaires ne sont pas toujours continues… voir TD4.

Exemples de différentielle:

1. différentielle d'une appl constante

   c'est 0 ∈ L(E,F) évidemment.

2. différentielle d'une A dans L(E,F)

   Soit f :E –> F donnée par f(x) = Ax. Quelle est sa différentielle ?

   On calcule f(a+h) - f(a) = Ah, donc par unicité Df(a) = A (indépendant de a !). Df est donc constant, donc en partic C^1.

3) Dérivées directionnelles (Gateaux)

On peut définir une notion plus faible que la différentielle habituelle (de Fréchet). C'est la différentielle de Gateaux (René Gateaux, mathématicien français mort très jeune au début de la guerre de 14. Le 3/10/1914). C'est une dérivée directionelle:

pour h fixé, on regarde la limite

(f(a+th) - f(a))/t t–>0,

si elle existe, on la note T_a f(h). On dit que f est Gateaux-différentiable sur si h -> T_a f (h) est L(E,F). Bien sûr Fréchet ==> Gateaux (et dans ce cas la différentielle est la même), mais pas l'inverse: pour Gateau la façon dont la limite converge peut dépendre de h, pour Fréchet c'est uniforme.

exemples cf TD

4) Différentielle d'une application composée

Prop Soient X,Y,Z trois espace affines normés. U ouvert de X, V ouvert de Y. On se donne f: U –> Y et g: V –> Z. Soit a ∈ U tel que f(a) ∈ V.

1. Si f est diff en a et g est diff en f(a), alors g o f est diff en a, et sa différentielle en ce point est

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

2. si f est C^1 dans U et g est C^1 dans V, alors g o f est C^1 dans son domaine de définition U ∩ f^{-1} (V)

Preuve

1. on a, pour h dans E:

   f(a+h) = f(a) + Df(a)·h + o(h)

   et pour u dand F:

   g(f(a) + u) = g(f(a)) + Dg(f(a))·u + o(u)

   Donc:

   g o f (a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + Df(a)·h + o(h))

   Posons u = Df(a)·h + o(h) qui apparaît dans la formule ci-dessus de sorte que

   g o f (a+h)) = g(f(a) + u)

   Donc = g(f(a)) + Dg(f(a))·u + o(u)

   Puisque ||u|| ≤ ||Df(a)·h|| + o(h) ≤ ||Df(a)|| || h || + o(h) = O(h) on voit que toute fonction o(u) est aussi o(h).

D'autre part

$Dg(f(a))\cdot(o(h)) \leq \| Df(a)\| \, o(h) = o(h)$

Donc au final

$g \circ f\,(a+h) = (f(a)) + Dg(f(a))\,(Df(a).h) + o(h)$

Donc g o f est différentiable et sa différentielle est

$D(f \circ g)\,(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$. (qui est bien continue comme composée de 2 appl (linéaires) continues)

1. composée d'applications continues avec (B,A) –> B o A qui est bilinéaire continue pour $A \in L(E,F)$ et $B \in L(F,G)$

5) Linéarité de diff

Prop Soit X affine et F vectoriel.

1. Les fonctions f : U -> F différentiables (en un point, ou sur un ouvert) forment un EV.
2. L'application f -> Df est linéaire

Q: dans quel espaces ?

Soit $Diff(x_{0,F})$ –> L(E,F)

Soit Diff(U,F) –> Applis(U,L(E,F))

Rem: les fonctions diff de U –> Y espace affine forment un espace affine ! (TD)

6) Applications à valeurs dans un produit

Prop f :U –> Y x Z est différentiable si et seulement si ses composantes $\pi_Y \circ f$ et $\pi_Z \circ f$ le sont.

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-10-04 mer. 11:00