CD - Cours 04

Table of Contents

ERRATUM cours 3

la preuve du corollaire des accroissements finis est incomplète (oubli de la valeur absolue du |h| ! donc valable seulement pour h>0) Voir les notes pour une preuve complète.

Chapitre 2 Morphismes d'EVN (applications linéaires continues)

redondances avec TOPG : je ne fais pas les preuves

On s'intéresse à changer d'EVN en "préservant les structures": "Morphismes" d'EVN (morphè = forme). A: E –> F où E et F sont des EVN (sur **R** ou **C**).

Ainsi si f: I –> E est un chemin diff, on voudrait que Af : I –> F soit encore un chemin diff.

Un evn est donné par un espace vectoriel et une norme. On va donc déjà demander que A préserve la structure d'ev: on dit que A est **linéaire**:

A(u+λ· v) = Au + λ· A v

Quid de la norme ? Que demander de || Au || ? On ne cherche pas des automorphismes (= bijectifs) seulement des morphismes, donc par exemple 0 doit être un bon morphisme. Donc on ne peut pas demander que la norme soit préservée (isométrie ||A u || = || u ||, impliquerait A injectif). Par contre on voudrait préserver la différentiabilité des chemins: préserver les limites. On va donc demander

$$||Au|| \leq C||u||$$

pour une certaine constante C (dépendant de A).

On a donc bien $||u(t)|| \to 0 \Rightarrow ||Au(t)|| \to 0$.

> Déf Un morphisme de E à F est une application linéaire A: E -> F telle qu'il existe C>0 tel que, pour tout u dans E, ||A(u)|| <= C ||u||. On note L(E,F) ou L_c(E,F) ou B(E,F) l'ensemble des morphismes de E dans F. Remarque: c'est encore un espace vectoriel!

Rem A est un morphisme ssi A est un "opérateur borné": image de la boule unité est bornée. D'où la notation B. La constante C = C(A) **optimale** est appelée la **borne** de A. En fait A–> C(A) est une **norme** sur l'EV L(E,F). On l'appelle parfois la **norme subordonnée** (car elle dépend de la norme sur E). On la note $||A||$ si c'est clair, $|||A|||$ (norme triple !) ou $||A||_{L(E,F)}$ s'il faut être précis.

> Q: Que veut dire optimal?? [la plus petite => le sup]

Déf: La borne de A (ou norme subordonnée) est

$$||A||_{L(E,F)} = sup||Av||, ||v|| = 1$$

c'est aussi sup $||Av||, ||v|| \leq 1$, ou encore sup $||Av||/||v||$, $v \neq 0$.

Prop la composée de morphismes est un morphisme, càd:… et la norme subordonnée vérifie:

Ainsi, si f: I -> E est un chemin continu, alors Af : I -> F est un chemin continu.

preuve soit epsilon donné, si alpha est tel que $|t-t0| <$ alpha ==> $||f(x) - f(x0)|| <$ epsilon/C alors on voit que pour $||Af(x) - Af(x0)|| <$ epsilon.

Et si f est différentiable I –> E , et A $\in$ L(E,F) alors Af est différentiable de I –> F.

preuve si f est tangente à 0 alors Af aussi. Donc si f est tangente à une fonction affine g, alors Af est tangente à Ag qui est aussi affine.

Q: Quelle est la dérivée de Af ? [c'est Af']

Ne poussons pas le suspense trop loin: on peut en fait montrer:

(TOPG): L(E,F) = appl linéaires continues de E dans F.

Ainsi si le morphisme A est inversible et A^{-1} est aussi un morphisme alors A est un **homéo**. et l'application x -> |A(x)| est une norme équivalente à |x|.

Exo (TOPG) une application linéaire est continue ssi elle est continue en 0

Q: est-ce qu'il existe des applications linéaires non continues ?

voir TD

Theo: si E est de dimension finie, toute application linéaire de E -> F est continue.

preuve: prendre une base de E ($e_{1,..en}$) alors on peut prendre C = $|Ae_1|+..+|Ae_n|$, si on met la norme sup sur E. Or les normes sur E sont équivalentes. (TOPG)

Theorème d'Hahn-Banach (admis) Soit E un evn et $u_0 \in$ E, non nul. Alors il existe une **forme linéaire continue** L : E –> R (donc L $\in L_c$ (E,R)) telle que

1. || L || = 1
2. $L(u_0) = || u_0 ||$

Application: Preuve des Accr Finis avec Hahn-Banach

Si on utilise un théorème fort d'analyse fonctionnelle (Hahn-Banach, sur tout EVN, nécessite l'axiome du choix), on peut se ramener aux fonctions de **R** dans **R** et appliquer le résultat connu!

D'après le corollaire du TAF scalaire, g est croissante. Si f(b) = f(a), il n'ya rien à prouver; sinon, le théorème de Hahn-Banach affirme l'existence d'une forme linéaire continue L, telle que

1. |L(x)| <= ||x|| pour tous x,
2. et L(f(b) - f(a)) = ||f(b) - f(a)||. (donc ||L||=1)

Par (1.) on a vu que L°f est dérivable I -> R, de dérivée L(f'(t)), donc majorée en norme par g'(t). Donc g - L°f est croissante, et ça donne le résultat en testant sur a et b.

Exo définir la bonne notion de morphisme d'espaces affines normés

Applications multilinéaires continues

Proposition Soient (E1 , $\|\cdot\|_1$), …, (En, $\|\cdot\|_n$), (F, $\|\cdot\|_F$) des evn et f : E1 × … × En → F une application n-linéaire. On munit E1 × … × En de la norme ||(u1 , …, un)|| = sup{$\|u_1\|_1$, …, $\|u_n\|_n$ } (ou de toute norme équivalente). On a les équivalences suivantes:

1. f est continue,
2. f est continue en zéro,
3. il existe C > 0 tel que $\|f(u1, \dots, un)\|_F \leqslant C \|u_1\|_1 \cdots \|u_n\|_n$, ∀(x1 , …, xn) ∈ E1 × … × En .

défi norme associée ||f|| … comme plus haut on prend la meilleure constante !

Author: San Vũ Ngọc

Created: 2023-09-28 jeu. 14:33