CD - Cours 03

Table of Contents

1) Rappels EVN et affines

2) Chemins

3) Tangente à un chemin différentiable

4) Accroissements finis

(…)

> Theo Soit X un espace affine normé, et I un intervalle ouvert. Soit f : I -> X continue, dérivable et tq ||f'(t)|| <= g'(t) pour une fonction g: I -> R dérivable. Alors pour a<b dans I, on a
>
> $$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

Coro: f est constante ssi f dérivable et f' identiquement nulle.

Coro: la conclusion du théo reste vraie si f et g continues sur [a,b] et dérivables à l'intérieur. (par continuité)

Preuve par contradiction et dichotomie

Si c'est faux il existe M>0 tq F(a,b) := ||f(b) - f(a)|| - (g(b) - g(a)) = M. On remarque que F(a,c) + F(c,b) = ||f(c) - f(a)|| + ||f(b) - f(c)|| - (g(b) - g(a)) >= F(a,b) par inégalité triangulaire. Donc l'un des deux F(a,c) et F(c,b) doit être >= M/2. On prend c la moitié (a+b)/2 et on recommence du côté où on a l'inégalité, qu'on note [a_1 ,b_1]… On obtient par récurrence:

$$F(a_n, b_n) \geq M/2^n \quad \text{et} \quad b_n - a_n = (b-a)/2^n$$

et bien sûr les an et bn (suites adjacentes) convergent vers le même point t dans [a,b].

Or F(an,bn) <= F(an,t) + F(t,bn). On rappelle que f(t+h) = f(t) + h·f'(t) + o(h), donc

Et F(an,t) = ||(t-an)·f'(t)|| + o(t-an) - g'(t)(t-an) + o(t-an)

et F(t,bn) = ||(bn-t)·f'(t)|| + o(bn-t) - g'(t)(bn-t) + o(bn-t)

donc:

$$M/2^n \leq F(a_n, b_n) \leq (|t-a_n| + |b_n - t|)||f'(t)|| - g'(t)(b_n - a_n) + o(t-a_n) + o(b_n - t)$$

on divise par bn-an qui vaut (b-a)/2^n: (sachant que |t-an| +|bn-t| = |bn-an| car t∈[a_n, b_n])

$$M/(b-a) \leq ||f'(t)|| - g'(t) + o(1)$$

et donc M/(b-a) <= || f'(t)|| - g'(t) ce qui contredit l'hypothèse.

Coro Si f est dérivable au voisinage de 0, k>=0

et $||f'(h)|| = o(h^k)$

alors $f(h) - f(0) = o(h^{k+1})$

preuve Pour tout ε on a un α tel que pour tous |t|<α,

$$||f'(h)|| \leq \varepsilon |h|^k$$

Pour t ∈ [0,1], $ $||f'(th)|| \leq \varepsilon t^k |h|^k$ $. on peut poser $g(t) = \varepsilon |h|^{k+1} t^{k+1}/(k+1)$ de sorte que $||hf'(t)|| \leq g'(t)$, donc en posant F(t) = f(ht) on a $|| F'(t) || \leq g'(t)$, donc par les AF pour t ∈ [0,1], $||F(1) - F(0)|| \leq g(1) - g(0) \leq \varepsilon |h|^{k+1}$.

Donc le résultat.

Formule de la moyenne pour E Banach. Voir chapitre 4

5) Dérivées d'ordre supérieures dans un EVN/EAN

Si f: I –> X affine, alors sa dérivée f':I -> E vectoriel. On peut donc se demander si f' est différentiable.

Rappel: un chemin f: I –> X est C^1 s'il est dérivable et sa dérivée est continue I –> E

Définition récursive k>=1: un chemin f: I –> X est C^k s'il est dérivable et sa dérivée est C^{k-1}

On définit ainsi par récurrence les dérivées successives $f^{(k)}$: I –> E

$f^{(k)}$ est la dérivée de $f^{(k-1)}$

Exo Si f est C^k ça implique que les $f^{(j)}$ j=0,…,k sont continues.

Déf On dit que f est C^∞ (ou "lisse") si C^k pour tous k.

exemple toute **fonction polynômiale**

$$P(t) = x_0 + t \cdot a_1 + t^2 \cdot a_2 + \ldots + t^n \cdot a_n$$

avec $x_0 \in X$ et $a_j \in E$

est C^∞. (exo TD)

Plus restrictif: On dira que f est k fois **différentiable au point t0** si f est C^{k-1} sur un intervalle ouvert contenant t0, et que la dérivée $f^{(k-1)}$ est différentiable en t0.

Dans ce cas on ne sait pas si $f^{(k)}$ existe sur tout I (seulement en t0). Même si $f^{(k)}$ existe sur tout I on ne sait pas si elle est continue.

Déf f est **tangente à 0 à l'ordre k en t0** si f(x) = $o((t-t0)^k)$.

Tangent à 0 = tangent à 0 à l'ordre 1.

Intuitivement, plus k est grand, plus f est "plate".

Déf: On dit que f est **plate** en 0 si elle est C^∞ et tangente à 0 à tout ordre.

Def si f est k fois dérivable en t_0, la fonction polynomiale

$$P(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) = f(t_0) + \ldots \in X$$

s'appelle le **polynôme de Taylor** de f en t0 à l'ordre k.

Le polynôme de Taylor est une bonne approximation de f au voisinage de t0.

Theo (développement de Taylor) Si f est k fois dérivable en t0 (k>=1) alors f est tangente à l'ordre k en x0 à son **polynôme de Taylor** de degré k. En formule:

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + o(h^k)$$

preuve: récurrence sur k. Pour k = 1 c'est la déf de différentiable. Supposons k>=2 et la formule vraie pour k-1. Posons

$$F(h) = f(t_0 + h) - \sum_{j=1}^{k} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(t_0).$$

On remarque que F(0) = f(t0). F est continue, dérivable au voisinage de 0 et on a

$$F'(h) = f'(t_0 + h) - \sum_{j=1}^{k} \frac{h^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j)}(t_0)$$

$$= f'(t_0 + h) - f'(t_0) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^j}{j!} f^{(j+1)}(t_0)$$

Par hypo de récurrence, puisque f' est (k-1) fois dérivable, on sait que

$$f'(t_0 + h) - f'(t_0) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^j}{j!} (f')^{(j)}(t_0) = o(h^{k-1})$$

Autrement dit, $F'(h) = o(h^{k-1})$. Par le corollaire de l'inégalité des AF:

$$||F(h) - F(0)|| = o(h^k),$$

ce qui est le résultat voulu.

Exemple de fonction plate non nulle: exp(-1/x²), 0 en 0.

Peut-on préciser le o(h^k) dans le dév de Taylor ?

Théo (reste de Lagrange) Si f : I –> X est **k+1** fois dérivable sur I (k>=1) alors pour a,b dans I:

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{j=1}^{k} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{[a,b]} ||f^{(k+1)}||$$

On verra le **reste intégral** lorsque E est un Banach au chapitre 4, qui impliquera facilement le reste de Lagrange. C'est intéressant (? ou pas) de voir qu'on peut démontrer le reste de Lagrange sans avoir Banach.

preuve: voir TD

—

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-09-20 mer. 15:56
Validate