# CD - Cours 02

## Table of Contents



<2023-09-12 mar.>

## Chap 1 (suite)

### 1) Rappels EVN et affines

### 2) Chemins

### 3) Tangente à un chemin différentiable

(…)

Comme d'habitude, X désigne un espace affine et E son espace vectoriel asocié.

Déf: f: I -> E **tangent à zéro** en t0: f(t) = o(t-t0)

Ici on parle bien de E, pas X.

Exemple: quelles sont les applications linéaires (ou affines) J -> E tangentes à zéro en t0 ? (nulles!) (exercice)

Exo TD Les fonctions f:R->R tangente à 0 en 0 sont exactement les fonctions:

- qui s'annulent en 0
- et dérivables en 0

Déf: Chemins f et g : I -> X affine sont **tangents entre eux** en t0 si (f-g) : I –> E est tangent à zéro.

Comment vérifier que deux chemins sont tangents ? Comme X est affine on peut chercher des chemins particuliers: droites affines: g(t) = $x_0$ + tv (v = vecteur directeur)

Déf: v est un **un vecteur tangent** à f en t0: si f est tangente à une droite affine de vecteur directeur v

Évidemment le vecteur directeur d'une droite est un vecteur tangent à cette droite.

Exemple soit e un vecteur de E. f(t) = te et g(t)=2te ont tous les 2 le vecteur e comme vecteur tangent. Pourtant f et g ne sont pas tangents entre eux! pas la même vitesse.

Déf: **le vecteur vitesse** de f en t0 (s'il existe): un vecteur v0 tel que f est tangente à f($t_0$) + (t-t0)v0

Tous les chemins ont-il un vecteur vitesse? Non

Déf: Soit t0 dans I. Un chemin f: I –> X est **différentiable** en t0 s'il existe un vecteur v0 tel que f est tangent à $f(t_0)$ + (t-t0)v en t0, càd: la formule familière:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0\\ t_0+h\in I}} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = v_0$$

Rem: on dit aussi chemin **dérivable** et v0 est la **dérivée** de f en t0.

Si E=R c'est la notion habituelle !

Rem on peu définir les dérivées à droite (h>0) /à gauche (h<0).

Rem: d'un point de vue plus abstrait, le vecteur vitesse répond à la question: quelle est la classe d'équivalence des chemins dérivables qui sont tangents entre eux en t0 ? (c'est ceux qui ont le même vecteur vitesse)

Déf: L'**espace tangent** à X en x0, noté $T_{x_0}X$, est l'ensemble de tous les vecteurs vitesses possibles pour des chemins qui passent par x0 en t0.

Prop: $T_{x0}$ X = E preuve: prendre les droites!

La notion paraît donc ici d'un intérêt limité, mais c'est celle qui va bien se généraliser pour des espaces courbes (variétés)

Exo Si f : I -> $R^n$, muni de la norme du sup, alors f est différentiable ssi ses composantes le sont, et la dérivée est le vecteur des dérivées des composantes.

Coro c'est encore vrai pour n'importe quelle norme sur $R^n$, car elles sont équivalentes, et donc définissent les mêmes limites. (TOPG)

Déf si f : I -> X est différentiable sur tout t dans I, on dit que f est **différentiable** (ou dérivable) sur I. L'application t -> v(t) est la dérivée ou différentielle de f, notée Df(t) ou f'(t)

Attention multiplicité des notations ! On en verra d'autres… C'est signe que cette notion est utilisée dans de nombreux domaines différents!

Prop: diff en t0 => continu en t0 (au sens où si f vérifie la formule limite ci-dessus, alors f est continue en t0.

preuve: f(t0+h) = f(t0) + h e(h), où e(h) -> v0, donc est borné près de h=0. Donc he(h) -> 0, donc f(t0+h) -> f(t0)

exercice montrer la continuité de f en t0 avec les epsilon alpha.

Déf On dit que f : I -> X est $C^1$ sur I ouvert si f y est dérivable et Df y est continue. On note $f \in C^1(I;X)$ .

Déf: Chemins C1 par morceaux: pour tout a<b dans I, on a un recouvrement de ]a,b[ par un nombre fini de points et d'intervalles ]ai,bi[ où f est C1 avec limites à g/d de la différentielle.

Proposition (dérivée d'une somme) Si f: I –> X et g : I –> E on peut définir f+g : t -> f(t) + g(t) $\in$ X. Si f est g sont dérivable en un point t0, alors f+g aussi et on a

(f+g)' (t) = f'(t) + g'(t)

preuve: exo (TD) continuité de la somme (TOPG)

Proposition (dérivée d'un produit) Si f: I –> E et g : I –> R on peut définir gf : t -> g(t) f(t) $\in$ E. Si f est g sont dérivable en un point t0, alors fg aussi et on a

(gf)' (t) = g'(t)f(t) + g(t)f'(t)

preuve: c'est la même preuve que R -> R; il suffit de considérer

gf(t0+h) - gf(t0) = (g(t0+h) - g(t0))f(t0+h) + g(t0)(f(t0+h) - f(t0))

On divise par h et on prend la limite (les lois d'addition et de mult par un scalaire sont continues ! TOPG)

Proposition (dérivé d'une composition) Si g: I -> J et f : J -> X dont dérivables en t0 et g(t0) resp., alors f o g aussi et

(f˚ g)'(t) = g'(t)· f'(g(t))

preuve g(t0+h) = g(t0) + hg'(t0) + o(h) par déf de dérivabilité de g. Donc par déf de dériv de f

f(g(t0+h)) = f(g(t0)) + [hg'(t0) + o(h)] f'(g(t0)) + o(hg'(t0) + o(h))

= f(g(t0)) + hg'(t0) f'(g(t0)) + o(h)

CQFD.

## 4) Accroissements finis

Théo (rappel) **égalité des accroissements finis** Soit a<b, f:[a,b] -> R continue, differentiable (=dérivable) sur l'ouvert ]a,b[. Soit g l'unique fonction affine qui coincide avec f en a et b, alors il existe c dans ]a,b[ tel que f'(c) = g'(c)

exercice quelle est cette fameuse fonction affine g?

=> g(t) = f(a) + (t-a)(f(b)-f(a))/(b-a)

qu'on peut écrire aussi commre barycentre:

==> g(t) = ((b-t)f(a) + (t-a)f(b))/(b-a)

preuve on considère h = f - g et on utilise le lemme fondamental: (uniquement valable pour les fonctions scalaires!)

lemme différentiable + extrêmum => dérivée nulle

preuve du lemme: à la fois >=0 et <=0

fin de la preuve: h est continue et vaut 0 en a et b. Soit elle est nulle (ok) soit le max est atteint en t0 dans ]a,b[ (elle atteint ses bornes par continuité et compacité TOPG). Alors h'(t0)=0 CQFD.

Corollaire: si f derivable, f est croissante sur I ssi f' >= 0.

preuve: par l'absurde si f n'est pas croissante, ∃ a<b, f(b)< f(a), par le TAF ∃ c tq f'(c)<0

Rem **le TAF est faux pour f vectorielle**, ie à valeurs dans un ev de dim >=2. exo considérer l'application f : [0, 2pi] -> $R^2$ définie par f(t) = (cos t, sin t) [f(0)=f(2pi) mais f'(t) ne peut pas s'annuler]

**Inégalité** des AF pour f vectorielle

Theo Soit f : I -> X continue, dérivable et tq ||f'(t)|| <= g'(t) pour une fonction g: I -> R dérivable à l'intérieur. Alors pour a<b dans I, on a

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

Coro: f est constante ssi f dérivable et f' identiquement nulle.

Coro: la conclusion du théo reste vraie si f et g continues sur [a,b] et dérivables à l'intérieur. (par continuité)

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-09-13 mer. 12:01