CD - Cours 01

Table of Contents

Introduction

1. Calcul différentiel Licence de mathématiques L3 parcours "Mathematiques fondamentales" Groupe "Beaulieu"

   Calculer des dérivées? ou plutôt un savant mélange de topologie, analyse, géométrie, algèbre !

2. présentation enseignants

   San VŨ NGỌC (Descriptif de ma recherche)

   Karim BEKKA

3. modalités de contrôle:

   2 QCM de 30m en fin de cours (QCM1, QCM2)

   1 Contrôle 1h en cours (C1)

   1 Contrôle 2h en amphi à prévoir (T)

   14 Semaines: (soit 21h de cours, 21h de TD)

   Programme **prévisionnel**:

#semaine	date	cours	contenu
36	<2023-09-05 mar.>	CM1	Intro, chap1
37	<2023-09-12 mar.>	CM2	chap1
38	<2023-09-19 mar.>	CM3	chap1
39	<2023-09-26 mar.>	CM4	chap2
40	<2023-10-03 mar.>	CM5	chap3
41	<2023-10-10 mar.>	CM6	chap3
42	<2023-10-17 mar.>	CM7	chap4 + QCM1
43	<2023-10-24 mar.>	CM8	chap4
44		vacances	
45	<2023-11-07 mar.>	CM9	chap5
46	<2023-11-14 mar.>	CM10	chap5 + C1

#semaine	date	cours	contenu
47	<2023-11-21 mar.>	CM11	chap5
48	<2023-11-28 mar.>	CM12	chap6
49	<2023-12-05 mar.>	CM13	chap6 + QCM2
50	<2023-12-12 mar.>	CM14	chap7
51	<2023-12-21 jeu.>	T	

Soit CC la moyenne des 3 premiers contrôles:

CC = (QCM1 + QCM2 + 2xC1) / 4

Note finale:

N = max (T; (CC+T)/2; min(10,CC))

Autrement dit, si on a 10 au CC, on est assuré de valider le module, le T est du bonus.

Les règles suivantes seront appliquées en cas d’absences :

- en cas d’absence injustifiée à un contrôle la note 0 est attribuée à ce contrôle;
- les abJ donnent lieu à une "neutralisation" de la note, càd:
  - en cas d’absence justifiée aux 3 premiers contrôles on attribue à ces deux contrôles la note 0;
  - en cas d’absence justifiée à un ou deux des 3 premiers contrôles on attribue aux contrôles non faits la seule note obtenue ou la moyenne des 2 notes obtenues.
  - en cas d’absence justifiée au troisième contrôle on attribue à ce contrôle la note CC.

4. Plan du cours
   1. Fonctions d'une variable à valeur dans un Espace Affine normé
   2. Interlude: applications linéaires continues
   3. Différentielle d'une application f:E->F
   4. Chemins dans un Banach
   5. Difféomorphismes et inversion locale
   6. Différentielles d'ordre supérieur
   7. Extrêma et sous-variétés

5. Références Pas (encore) de poly !

   - Calcul différentiel, Christol, Gilles & Cot, Anne & Marle, Charles-Michel
   - Calcul Differentiel et Calcul Intégral, Marc Chaperon
   - (référence !) Cours de calcul différentiel, Henri Cartan

   Réviser les fonctions R -> R !

Chapitre 1 Fonctions d'une variable à valeur dans un EVN (ou EAN)

Qu'est-ce qu'une fonction ?

À quoi sert une fonction? Fonction ou application ? observer X->R, transformer, X->Y

[« Comment s’étaient-ils rencontrés ? Par hasard, comme tout le monde. Comment s’appelaient-ils ? Que vous importe ? D’où venaient-ils ? Du lieu le plus prochain. Où allaient-ils ? Est-ce que l’on sait où l’on va ? » (Jacques le Fataliste, Diderot)]

Dans ce chapitre on va commencer doucement avec f : R -> X (c'est plus facile que f : X -> R) Par exemple, si X= R², c'est juste deux fonctions $f = (f_1, f_2)$ Si X= R^n, on a n fonctions. Si X est un esp vec de dimension infinie, on a quoi?

f: R -> E: (fonction vectorielle) qu'est-ce qui change par rapport à R->R (fonction scalaire). Qu'est-ce qui marche, ne marche pas ?

Exemple: une suite $(u_n)(t)$ dépendant d'un paramètre t

1) Rappels EVN et affines

Définition **EV**: Ensemble non vide muni d'une loi de groupe commutatif (addition) (donc automatiquement non vide) et d'une multiplication externe par un corps K (également commutatif, ici R), de façon compatible: 0.u = 0, x.(y.u) = (xy).u, x.(u+v) = x.u + x.v, et 1.v = v.

Remarque: on commence par un ensemble! ses éléments = des points ou des vecteurs ? Les deux ! Voir ci-dessous (esp affine). Ici corps K = R. Pourrait aussi être C, mais un peu particulier (fonctions holomorphes)

Définition **norme**, EVN

Une norme sur E est une application ||.|| : E → R (en fait, automatiquement [0, ∞)) telle que:

- (N1) : $||x|| = 0$ ssi $x = 0$
- (N2) : $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$, $\forall x \in E$, $\lambda \in K$, [homogénéité]
- (N3) : $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$, $\forall x, y \in E$. [inégalité triangulaire]

Alors (E , ||.||) est un espace vectoriel normé (evn).

Déf: **Espaces affines**. Abstraitement: Des points X avec une "action libre et transitive d'un EV E (vu comme groupe additif)". Faire un dessin: point+flèche = point.

- Libre: le seul vecteur qui vérifie x + v = x c'est 0
- transitive: "toute paire de points est reliée par un vecteur": $\forall x,y \in X$, $\exists\, v \in E$ tel que x+v = y

Du coup, tout EV est un espace affine (il "agit" sur lui-même!). On peut donc voir les éléments comme des points ou des vecteurs.

En pratique, dès qu'on a un point x0 dans X, on peut assimiler X à E, plus précisément: X = x0 + E. (preuve) (On dira que E est l'espace tangent à X)

Rem: Si X est affine, et x,y dans X, alors on peut définir "y-x" c'est un vecteur ! v tel que y = x+v

En effet l'unicité vient du fait que l'action est libre (et que c'est une action: (x+v) + w = x+(v+w).

Déf: Espace affine normé. (X,E) où E est un EVN.

2) Chemins

Question: X un ensemble, qu'est-ce qu'un chemin dans X ?

On va vouloir une app continue f: I -> X où I intervalle de R; X un ensemble… Mais: il faut une notion de continuité! voir TOPG.

Rem: souvent noté **gamma**: I -> X. (géométrie). On utilisera plutôt f dans ce chapitre.

Déf: **Chemins dans E**: définition de continuité avec les epsilon alpha: $\forall\, t \in I$, $\forall\, e > 0$ $\exists\, a > 0$ tel que:

"si s ∈ I est tel que |t-s|<a, alors || f(t) - f(s) || < e"

Déf: Chemins dans un espace affine X = x0+E. ça fait encore sens puisque f(t) - f(s) est bien un vecteur!

Déf: Arcs = chemin défini sur [a,b] (continuité à gauche, à droite)

Rappel Si f : I -> R, alors f([a,b]) est un intervalle compact, en particulier f atteint ses bornes. TOPG: De façon générale, si f :I -> X est continue, alors f[a,b] est compact, mais il n'y a pas de "bornes".

3) Tangente à un chemin différentiable

Notations de Landau o et O

Si f: I -> E, g: I -> F (en général F=R) et t0 dans I alors "f = o(g) en t0" s'il existe une fonction e(t): I -> R qui tend vers 0 en t0 telle que ||f(t)|| = e(t)||g(t)|| près de t0.

et "f = O(g) en t0" si il existe une fonction b(t) : I -> R bornée telle que ||f(t)|| = b(t)||g(t)|| près de t0. Autrement dit, si on a un C tel que ||f(t)|| <= C ||g(t)||

Déf: f: I -> E **tangent à zéro** en x0: f(t) = o(t-t0)

Exemple: quelles sont les applications linéaires (ou affines) J -> E tangentes à zéro en t0 ? (nulles!) (exercice)

Exo Donner un exemple de f:R->R tangente à 0 en 0 non nulle.

Déf: Chemin f et g : I -> X affine **tangents entre eux** en t0 si f-g est tangent à zéro.

Author: San Vũ Ngọc
Created: 2023-09-20 mer. 11:38