Université de Rennes Année 2024-2025
L3 Mathématiques fondamentales **Module: Calcul Différentiel (CD)**

Examen terminal: 1h30

Exercice 1 : On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + 3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et calculer celles-ci.
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels

$$\mathbb{R}_n[X] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k ; a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, égale à $(n+1)$.

1. Énoncer le théorème des fonctions implicites.
2. Justifier que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(P,x) = P(x)$ est de classe C^1.
3. Soit $(P_0, x_0) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}$. Calculer la différentielle partielle de f par rapport à la variable P (resp. x) en (P_0, x_0), notée $\frac{\partial f}{\partial P}(P_0,x_0)$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0,x_0)$).
4. On suppose que x_0 est racine simple de P_0, c'est à dire que $P_0'(x_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que tout polynôme $P \in V$ admet une racine au voisinage de x_0.
5. Montrer que, quitte à réduire V, cette racine est simple.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, et $f \in C^3(E,F)$,

1. Soient a, b dans E. exprimer $f(b) - f(a)$ au moyen d'une formule de Taylor au point a, à l'ordre 2 (c'est-à-dire avec les dérivées jusqu'à l'ordre 2 dans la partie polynômiale), en explicitant le reste.
2. On suppose que $f(tx) = t^2 f(x)$ pour tous $t \in]0, +\infty[$ et tout $x \in E$; montrer que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ et que, pour tout $x \in E$,
$$Df(x) \cdot x = D^2 f(0) \cdot (x,x) = D^2 f(x) \cdot (x,x).$$
3. Expliciter les développements de Taylor de la question 1 avec $(a = 0, b = x)$ et $(a = x, b = 0)$ respectivement, et en déduire que le reste est nul dans les deux cas.

Exercice 4 : On considère l'ensemble

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^{10} + y^{10} = 1\}\,.$$

1. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$.
   Montrer qu'il existe (x^*, y^*) dans N tel que $f(x^*, y^*) = \max\{f(x,y);\ (x,y) \in N\}$.
2. Soit $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^{10} + y^{10}$. Calculer $Dg(x^*, y^*)$ et montrer qu'elle est surjective.
3. Déterminer les points de N les plus loin de l'origine $(0,0)$ pour la distance euclidienne.