Université de Rennes Année 2023-2024
L3 **Module CD**

Examen terminal : 1h30

Exercice 1 : On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Montrer que, pour tout $v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto f(tv)$ est dérivable en 0.
3. f est-elle différentiable $(0,0)$?

Exercice 2 : On considère l'ensemble $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36\}$ et la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x+y+z \end{array}$$

1. Démontrer qu'il existe $A \in S$ tel que $f(A) = \max\{f(x,y,z);\ (x,y,z) \in S\}$.
2. Déterminer les points où la restriction de f à S atteint son maximum.

Exercice 3 : On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} G: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (X,t) = ((x,y),t) & \mapsto & \left(x - \frac{1}{4}\sin(x+y) - 2(t-1), y - 1 - \frac{2}{3}\arctan(x-y) + t\right) \end{array}$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et calculer ses différentielles partielles par rapport à la variable X et à la variable t, en tout point de $\mathbb{R}^3$.
2. En appliquant le théorème des fonctions implicites, montrer que, au voisinage du point $(X,t) = ((0,0),1)$, l'ensemble des zéros de la fonction G est donné par le graphe d'une fonction $t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & A^2 \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $M_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle en tout point $A \in M_2(\mathbb{R})$, notée $Df(A)$.
2. Soit $A_0 \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que, si f est un C^1-difféomorphisme local de $M_2(\mathbb{R})$ en A_0, alors $\mathrm{Ker}(Df(A_0)) = \{0\}$.
3. On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (α,β) pour que f soit un un C^1 difféomorphisme local de $M_2(\mathbb{R})$ en A_0.

Exercice 1 :

1. $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|_2$ donc f est continue en $(0,0)$.
2. Soit $v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tv) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2} t$ donc l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto f(vt)$ est dérivable et sa dérivée en 0 vaut $\frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$.
3. La question précédente avec $v = e_1$ et $v = e_2$ montre que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0,0)$ et que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$
Par l'absurde, supposons f différentiable en $(0,0)$. Alors
$$df(0,0).(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$$
donc
$$\epsilon(x,y) := \frac{\|f(x,y) - f(0,0) - df(0,0).(x,y)\|}{\|(x,y)\|} = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \underset{(x,y)\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$
Or, pour tout $t > 0$, $\epsilon(t,t) = 1/2^{3/2}$: contradiction.

Exercice 2 :

1. S est un compact de $\mathbb{R}^3$ car
— fermé : image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 36$
— borné : pour tout $(x,y,z) \in S$ alors $\|(x,y,z)\|_\infty \leq 6$.
L'application f est continue sur le compact S donc elle atteint ses bornes. En particulier, il existe $A \in S$ tel que $f(A) = \max\{f(x,y,z);\ (x,y,z) \in S\}$.
2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix}$$
et ce vecteur s'annule uniquement en $(x,y,z) = (0,0,0)$ qui n'est pas dans S.
On applique le théorème des extrema liés :
— $g \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$,
— $\nabla g(A) \neq 0$ car $A \in S$,
— $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ et $f|_S$ admet un extremum local en A
donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(A) = \lambda \nabla g(A)$. En notant $A = (x,y,z)$ on obtient le système
$$\begin{cases} 1 = \lambda * 2x \\ 1 = \lambda * 4y \\ 1 = \lambda * 6z \\ 36 = x^2 + 2y^2 + 3z^2. \end{cases}$$
Comme $(0,0,0) \notin S$, $\lambda \neq 0$ donc $\mu := \frac{1}{2\lambda}$ est bien défini et on obtient $x = 2y = 3z = \mu$ et $36 = \mu^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6}\mu^2$ donc $\mu = \pm 6\sqrt{6/11}$. Ainsi $f|_S$ est maximale en $A = (6\sqrt{6/11}, 3\sqrt{6/11}, 2\sqrt{6/11})$ et minimale en $-A$.

Exercice 3 :

1. G est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car ses composantes sont des combinaisons linéaires de composées d'applications de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème des fonctions composées justifie que, pour tout $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $t\in\mathbb{R}$, on a $\frac{\partial G}{\partial X}(X,t)=\mathrm{Jac}(G)(X,t)H$ où
$$\mathrm{Jac}(G)(X,t)=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}\cos(x+y) & -\frac{1}{4}\cos(x-y) \\ \frac{-2}{3(1+(x-y)^2)} & 1+\frac{2}{3(1+(x-y)^2)} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial G}{\partial t}(X,t)=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
2. On applique le TFI :
— $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont complets,
— $G\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$,
— $G((0,0),1)=0$,
— $\frac{\partial G}{\partial X}((0,0),1):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est bijective car son déterminant vaut
$$\begin{vmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -2/3 & 5/3 \end{vmatrix}=\frac{15}{12}-\frac{2}{12}=\frac{13}{12}\neq 0.$$
donc il existe un voisinage ouvert Ω de $((0,0),1)$ dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert U de 1 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi\in C^1(U,\mathbb{R}^2)$ telle que
$$((X,t)\in\Omega \text{ et } G(X,t)=0)\Leftrightarrow(t\in U \text{ et } X=\varphi(t))\,.$$

Exercice 4 :

1. Soit $A\in M_2(\mathbb{R})$. L'application $L:H\in M_2(\mathbb{R})\mapsto AH+HA$ est linéaire et continue (car en dimension finie). Pour tout $H\in M_2(\mathbb{R})$, $f(A+H)-f(A)-L(H)=H^2=o(\|H\|)$ donc f est différentiable en A et $df(A)=L$. Ceci est vrai pour tout $A\in M_2(\mathbb{R})$ donc f est différentiable sur $M_2(\mathbb{R})$.
D'après l'expression précédente, $df:A\in M_2(\mathbb{R})\mapsto df(A)\in\mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ est linéaire, donc elle continue (dim finie). Ainsi, f est de classe C^1 sur $M_2(\mathbb{R})$.
2. Si f est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage ouvert U de A_0 sur un voisinage ouvert V de $f(A_0)$ alors on déduit de l'égalité
$$\forall A\in U\,,\qquad f^{-1}(f(A))=A$$
et du TFC que $df^{-1}(f(A))df(A)=Id$, donc, pour tout $A\in U$, $df(A)$ est un isomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et $df(A)^{-1}=df^{-1}(f(A))$. En particulier $df(A_0)$ est injective, cad $\mathrm{Ker}(df(A_0))=\{0\}$.
3. Montrons que f est un C^1-difféomorphisme local de $M_2(\mathbb{R})$ au voisinage de A_0 si et seulement si $df(A_0)$ est un isomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$, cad ssi $\mathrm{Ker}(df(A_0))=\{0\}$.

   Le sens $\Rightarrow$ a été fait dans la question précédente. Démontrons $\Leftarrow$: on suppose que $df(A_0)$ est un isomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$. On applique le TIL :
— $M_2(\mathbb{R})$ est un evn complet, car de dimension finie,
— $f\in C^1(M_2(\mathbb{R}),M_2(\mathbb{R}))$,
— $df(A_0)$ est un isomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$,
donc f est un C^1-diffeomorphisme local de $M_2(\mathbb{R})$ au voisinage de A_0.

   Le calcul montre que
$$df(A_0).H=\begin{pmatrix} 2\alpha h_{1,1} & (\alpha+\beta)h_{1,2} \\ (\alpha+\beta)h_{2,1} & 2\beta h_{2,2} \end{pmatrix}$$
Ainsi $\mathrm{Ker}(df(A_0))=\{0\}$ ssi $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ et $\alpha+\beta\neq 0$.