Calcul différentiel — TD 11 avec corrections

Extrema liés

Exercice 1. Question de cours.
Qu'est-ce qu'un multiplicateur de Lagrange ?

Correction. Voir le dernier théorème du cours ! La question est ouverte pour susciter la discussion. Qu'est-ce qu'une sous-variété « définie localement par une équation $g(x) = f(a)$ » ? Qu'est-ce qu'un extremum lié ? à quoi servent les multiplicateurs de Lagrange ?

Exercice 2. Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $A : E \to F$ une application linéaire surjective. Montrer qu'il existe des entiers $m, k \in \mathbb{N}$ et des isomorphismes linéaires $S : E \to \mathbb{R}^{m+k}$ et $T : F \to \mathbb{R}^m$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad T \circ A \circ S^{-1}(x, y) = x\,.$$

Correction. Soit $H \subset E$ un supplémentaire de $\ker A$ dans E :

$$E = H \oplus \ker A\,.$$

Soit $\tilde{A} = A|_H$ la restriction de A sur l'espace H. c'est un isomorphisme de H sur F. Pour tout élément $(u, v) \in H \times \ker A$ on a

$$\tilde{A}^{-1} \circ A(u + v) = u\,.$$

C'est déjà quasiment ce qui est demandé ! Il suffit maintenant d'identifier u à $x \in \mathbb{R}^m$ et v à $y \in \mathbb{R}^k$. Pour ça notons $m = \dim F$, et soit $f : H \to \mathbb{R}^m$ un isomorphisme (donné par le choix d'une base de H). Notons $T = f \circ \tilde{A}^{-1} : F \to \mathbb{R}^m$.
Enfin soit $k = \dim \ker A$ (par le théorème du rang, $m+k = \dim E$) et soit $g : \ker A \to \mathbb{R}^k$ un isomorphisme (donné par le choix d'une base de $\ker A$). Posons $S(u+v) = (f(u), g(v))$, c'est un isomorphisme de $E = H \oplus \ker A$ dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$. Et on a bien

$$T \circ A \circ S^{-1}(x, y) = T(A(u + v)) = T(A(u)) = f(u) = x\,.$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse dans $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1\,.$$

1. Montrer que l'application $g(x, y) = \frac{x^2}{3} + y^2$ est une submersion locale en tout point de $\mathcal{E}$. Est-elle une submersion locale en tout point de $\mathbb{R}^2$?

2. On considère les fonctions

$$f_1(x,y) = y$$
$$f_2(x,y) = x + y$$
$$f_3(x,y) = x^2 + y^2 .$$

Déterminer (et dessiner) les extrema locaux des fontions f_j restreintes à $\mathcal{E}$.

Correction. Si $a = (x,y) \in \mathcal{E}$ est un extremum local de $f|_{\mathcal{E}}$, alors par le théorème des multiplicateurs de Lagrange (après vérifications des hypothèses !), il existe un réel λ (on identifie les formes linéaires sur $\mathbb{R}$ aux réels) tel que

$$Df(a) = \lambda Dg(a) .$$

En écrivant les matrices Jacobiennes (de taille 1×2), cette condition s'écrit

$$\begin{pmatrix} \partial_x f(a) & \partial_y f(a) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} .$$

On obtient donc les deux équations

$$\partial_x f(a) = \frac{2\lambda}{3} x \quad \text{ et } \partial_y f(a) = 2\lambda y ,$$

sans oublier l'équation $g(x,y) = 1$. Appliquons ça aux fonctions f_1, f_2, f_3 : ... à finir

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞. On suppose que $Df(0) = 0$ et que pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, $D^2 f(0) \cdot (h,h) > 0$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $D^2 f(0) \cdot (h,h) \geqslant C \|h\|^2$ pour tous $h \in \mathbb{R}^n$ (et pour une norme $\|\cdot\|$ quelconque).
2. Montrer que l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local de f.

Correction.

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ définie par $\phi(x) = D^2 f(0) \cdot (x,x)$.
   Comme $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ et ϕ est continue, il existe $a \in S$ tel que $\min_{x \in S} \phi(x) = \phi(a)$. On pose $\phi(a) = C$, alors $C > 0$ et pour tout $x \in S$, $\phi(x) \geqslant C$.
   Maintenant, pour $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\frac{h}{\|h\|} \in S$ d'où

   $$\phi(h) = \phi(\|h\| \frac{h}{\|h\|}) = D^2 f(0) \cdot (\|h\| \frac{h}{\|h\|}, \|h\| \frac{h}{\|h\|}) = \|h\|^2 \phi(\frac{h}{\|h\|}) \geqslant C \|h\|^2 .$$

   Cette inégalité est encore valable pour $h = 0$.
2. Du DL à l'ordre 2 de f en 0 et de l'inégalité établie en 1. on a

   $$f(x) - f(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0) \cdot (x,x) + o(\|x\|^2) \geqslant \frac{C}{2} \|x\|^2 + o(\|x\|^2) = \|x\|^2 (\frac{C}{2} + \frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2}).$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2} = 0$ et que $\frac{C}{4} > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\|x\| < \varepsilon$ $\frac{|o(\|x\|^2)|}{\|x\|^2} \leqslant \frac{C}{4}$, d'où $\frac{C}{2} + \frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2} \geqslant \frac{C}{2} - \frac{C}{4} = \frac{C}{4}$.
Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\|x\| < \varepsilon$ on a $f(x) - f(0) \geqslant \frac{C}{4} \|x\|^2 \geqslant 0$, donc l'origine est un minimum local de f.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien usuel $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, soit S^{n-1} la sphère unité. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et soit $f(x) = \langle Ax, x\rangle$.

1. Montrer que S^{n-1} est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que les extrema locaux de f restreinte à S^{n-1} sont situés en des vecteurs propres de A.
3. Montrer que tous les vecteurs propres de A dans S^{n-1} sont des *points critiques de* $f|_{S^{n-1}}$, c'est-à-dire des points a où $Df(a)$ s'annule sur l'espace tangent T_aS^{n-1}.
4. Montrer qu'il existe un vecteur propre réalisant le maximum de $f|_{S^{n-1}}$, et qu'il correspond à la plus grande valeur propre de A.

Correction.

1. La fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \langle x, x\rangle$ est de classe C^∞, et pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $Dg(x)h = 2\langle x, h\rangle$. D'où $Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est surjective si et seulement si $x \neq 0$ i.e. $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ est une submersion.
   Ainsi, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x\rangle = 1\} = g^{-1}(\{1\})$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de codimension 1 i.e. de dimension $n - 1$.
2. Si $a \in S^{n-1}$ est un extremum local de f restreinte à S^{n-1}, par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que tel que $Df(a) = \lambda Dg(a)$, i.e. $2\langle Aa, .\rangle = 2\lambda\langle a, .\rangle$ ou encore $\langle Aa - \lambda a, .\rangle = 0$. En particulier $\|Aa - \lambda a\|^2 = \langle Aa - \lambda a, Aa - \lambda a\rangle = 0$. Comme de plus $a \neq 0$, c'est un vecteur propre de A.
3. Soit $a \in S^{n-1}$ un vecteur propre de A, il existe alors un réel λ tel que $Aa = \lambda a$. D'où pour tout $v \in T_aS^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n, \langle a, v\rangle = 0\}$, $Df(a)v = 2\langle Aa, v\rangle = 2\lambda\langle a, v\rangle = 0$ i.e. $T_aS^{n-1} \subset \ker Df(a)$. Ainsi tous les vecteurs propres de A sont des *points critiques de* $f|_{S^{n-1}}$.
4. Comme S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$ et f est continue, il existe $a \in S^{n-1}$ tel que $\max_{x\in S^{n-1}} f(x) = f(a)$. D'après 2., a est un vecteur propre de A, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Aa = \lambda a$. Soit λ' une autre valeur propre de A, alors il existe $b \in S^{n-1}$ tel que $Ab = \lambda' b$. Puisque $\|a\| = \|b\| = 1$, on aura

   $$\lambda = \lambda \|a\|^2 = \langle Aa, a\rangle = f(a) \geqslant f(b) = \langle Ab, b\rangle = \lambda' \|a\|^2 = \lambda'.$$

   On a montré que $\lambda = \max Sp(A)$.