

**Calcul différentiel — TD 11 avec corrections**

## Sous-variétés et extrema liés

**Exercice 1. Question de cours.**

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, et  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire surjective. Montrer qu'il existe des entiers  $m, k \in \mathbb{N}$  et des isomorphismes linéaires  $S : E \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$  et  $T : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad T \circ A \circ S^{-1}(x, y) = x.$$

**Correction.** Soit  $H \subset E$  un supplémentaire de  $\ker A$  dans  $E$  :

$$E = H \oplus \ker A.$$

Soit  $\tilde{A} = A|_H$  la restriction de  $A$  sur l'espace  $H$ . c'est un isomorphisme de  $H$  sur  $F$ . Pour tout élément  $(u, v) \in H \times \ker A$  on a

$$\tilde{A}^{-1} \circ A(u + v) = u.$$

C'est déjà quasiment ce qui est demandé ! Il suffit maintenant d'identifier  $u$  à  $x \in \mathbb{R}^m$  et  $v$  à  $y \in \mathbb{R}^k$ . Pour ça notons  $m = \dim F$ , et soit  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^m$  un isomorphisme (donné par le choix d'une base de  $H$ ). Notons  $T = f \circ \tilde{A}^{-1} : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Enfin soit  $k = \dim \ker A$  (par le théorème du rang,  $m + k = \dim E$ ) et soit  $g : \ker A \rightarrow \mathbb{R}^k$  un isomorphisme (donné par le choix d'une base de  $\ker A$ ). Posons  $S(u + v) = (f(u), g(v))$ , c'est un isomorphisme de  $E = H \oplus \ker A$  dans  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ . Et on a bien

$$T \circ A \circ S^{-1}(x, y) = T(A(u + v)) = T(A(u)) = f(u) = x.$$

**Exercice 2. Question de cours.**

Qu'est-ce qu'un multiplicateur de Lagrange ?

**Correction.** Voir le dernier théorème du cours ! La question est ouverte pour susciter la discussion. Qu'est-ce qu'une sous-variété « définie localement par une équation  $g(x) = f(a)$  » ? Qu'est-ce qu'un extremum lié ? à quoi servent les multiplicateurs de Lagrange ?

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{E}$  l'ellipse dans  $\mathbb{R}^2$  définie par l'équation

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

1. Montrer que l'application  $g(x, y) = \frac{x^2}{3} + y^2$  est une submersion locale en tout point de  $\mathcal{E}$ . Est-elle une submersion locale en tout point de  $\mathbb{R}^2$  ?

2. On considère les fonctions

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= y \\f_2(x, y) &= x + y \\f_3(x, y) &= x^2 + y^2.\end{aligned}$$

Déterminer (et dessiner) les extrema locaux des fonctions  $f_j$  restreintes à  $\mathcal{E}$ .

**Correction.**

1. La matrice jacobienne de  $Dg(x, y)$  est  $(\frac{2x}{3} \quad 2y)$ .

Elle est surjective si et seulement si elle est non nulle, donc si et seulement si  $(x, y) \neq (0, 0)$ . La fonction  $g$  étant  $C^1$  (et même  $C^\infty$ ), le théorème de submersion locale affirme que c'est une submersion locale en  $(x, y) \neq (0, 0)$ , c'est-à-dire sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . C'est donc une submersion locale en tout point de  $\mathcal{E}$ , mais pas en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

2. Puisque  $g$  est  $C^\infty$ , l'ensemble  $\mathcal{E}$  est une sous-variété (de classe  $C^\infty$ ). D'autre part,  $f$  est aussi  $C^\infty$ . Donc, si  $a = (x, y) \in \mathcal{E}$  est un extremum local de  $f|_{\mathcal{E}}$ , alors par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe un réel  $\lambda$  (on identifie les formes linéaires sur  $\mathbb{R}$  aux réels) tel que

$$Df(a) = \lambda Dg(a).$$

En écrivant les matrices Jacobiennes (de taille  $1 \times 2$ ), cette condition s'écrit

$$(\partial_x f(a) \quad \partial_y f(a)) = \lambda (\partial_x g \quad \partial_y g).$$

On obtient donc les deux équations

$$\partial_x f(a) = \frac{2\lambda}{3}x \quad \text{et} \quad \partial_y f(a) = 2\lambda y,$$

sans oublier l'équation  $g(x, y) = 1$ . Appliquons ça aux fonctions  $f_1, f_2, f_3$  :

(a) Pour  $f_1$  on a les équations

$$0 = \frac{2}{\lambda}3x, \quad 1 = 2\lambda y$$

sans oublier  $(x, y) \in \mathcal{E}$ , ce qui s'écrit  $g(x, y) = 1$ . On voit que  $\lambda = 0$  est impossible, donc  $x = 0$ , et donc  $y^2 = 1$ . Les deux points obtenus sont  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ .

Réciproquement, puisqu'en ces points  $f$  vaut respectivement 1 et  $-1$ , on voit facilement que le premier est un maximum (global) et le deuxième un minimum (global). En effet, sur  $\mathcal{E}$ ,  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ , donc  $y^2 \leq 1$ . (On peut aussi dire que c'est évident sur le dessin!)

(b)  $f_2$  à faire

(c)  $f_3$  à faire

**Exercice 4.** Dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire euclidien usuel  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ , soit  $S^{n-1}$  la sphère unité. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique, et soit  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ .

1. Montrer que  $S^{n-1}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ . Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que les extrema locaux de  $f$  restreinte à  $S^{n-1}$  sont situés en des vecteurs propres de  $A$ .
3. Montrer que tous les vecteurs propres de  $A$  dans  $S^{n-1}$  sont des *points critiques* de  $f|_{S^{n-1}}$ , c'est-à-dire des points  $a$  où  $Df(a)$  s'annule sur l'espace tangent  $T_a S^{n-1}$ .
4. Montrer qu'il existe un vecteur propre réalisant le maximum de  $f|_{S^{n-1}}$ , et qu'il correspond à la plus grande valeur propre de  $A$ .

**Correction.**

1. La fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \langle x, x \rangle$  est de classe  $C^\infty$ , et pour tout  $(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $Dg(x)h = 2\langle x, h \rangle$ . D'où  $Dg(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est surjective si et seulement si  $x \neq 0$  i.e.  $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  est une submersion.  
Ainsi,  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle = 1\} = g^{-1}(\{1\})$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^n$  de codimension 1 i.e. de dimension  $n - 1$ .
2. Si  $a \in S^{n-1}$  est un extremum local de  $f$  restreinte à  $S^{n-1}$ , par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que tel que  $Df(a) = \lambda Dg(a)$ , i.e.  $2\langle Aa, \cdot \rangle = 2\lambda \langle a, \cdot \rangle$  ou encore  $\langle Aa - \lambda a, \cdot \rangle = 0$ . En particulier  $\|Aa - \lambda a\|^2 = \langle Aa - \lambda a, Aa - \lambda a \rangle = 0$ . Comme de plus  $a \neq 0$ , c'est un vecteur propre de  $A$ .
3. Soit  $a \in S^{n-1}$  un vecteur propre de  $A$ , il existe alors un réel  $\lambda$  tel que  $Aa = \lambda a$ . D'où pour tout  $v \in T_a S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n, \langle a, v \rangle = 0\}$ ,  $Df(a)v = 2\langle Aa, v \rangle = 2\lambda \langle a, v \rangle = 0$  i.e.  $T_a S^{n-1} \subset \ker Df(a)$ . Ainsi tous les vecteurs propres de  $A$  sont des *points critiques* de  $f|_{S^{n-1}}$ .
4. Comme  $S^{n-1}$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  est continue, il existe  $a \in S^{n-1}$  tel que  $\max_{x \in S^{n-1}} f(x) = f(a)$ . D'après 2.,  $a$  est un vecteur propre de  $A$ , il existe alors  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $Aa = \lambda a$ . Soit  $\lambda'$  une autre valeur propre de  $A$ , alors il existe  $b \in S^{n-1}$  tel que  $Ab = \lambda' b$ . Puisque  $\|a\| = \|b\| = 1$ , on aura

$$\lambda = \lambda \|a\|^2 = \langle Aa, a \rangle = f(a) \geq f(b) = \langle Ab, b \rangle = \lambda' \|a\|^2 = \lambda'.$$

On a montré que  $\lambda = \max Sp(A)$ .