Calcul différentiel — TD 11

Sous-variétés et extrema liés

Exercice 1. Question de cours.
Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $A : E \to F$ une application linéaire surjective. Montrer qu'il existe des entiers $m, k \in \mathbb{N}$ et des isomorphismes linéaires $S : E \to \mathbb{R}^{m+k}$ et $T : F \to \mathbb{R}^m$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad T \circ A \circ S^{-1}(x, y) = x\,.$$

Exercice 2. Question de cours.
Qu'est-ce qu'un multiplicateur de Lagrange ?

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse dans $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1\,.$$

1. Montrer que l'application $g(x, y) = \frac{x^2}{3} + y^2$ est une submersion locale en tout point de $\mathcal{E}$. Est-elle une submersion locale en tout point de $\mathbb{R}^2$?
2. On considère les fonctions

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= y \\ f_2(x, y) &= x + y \\ f_3(x, y) &= x^2 + y^2\,. \end{aligned}$$

   Déterminer (et dessiner) les extrema locaux des fontions f_j restreintes à $\mathcal{E}$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien usuel $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, soit S^{n-1} la sphère unité. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et soit $f(x) = \langle Ax, x\rangle$.

1. Montrer que S^{n-1} est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que les extrema locaux de f restreinte à S^{n-1} sont situés en des vecteurs propres de A.
3. Montrer que tous les vecteurs propres de A dans S^{n-1} sont des *points critiques de* $f|_{S^{n-1}}$, c'est-à-dire des points a où $Df(a)$ s'annule sur l'espace tangent T_aS^{n-1}.
4. Montrer qu'il existe un vecteur propre réalisant le maximum de $f|_{S^{n-1}}$, et qu'il correspond à la plus grande valeur propre de A.