Calcul différentiel — TD 10 avec corrections

Difféomorphismes et inversion locale

Exercice 1. Question de cours.
Qu'est-ce qu'un difféomorphisme ? Un C^1-difféomorphisme ? Un difféomorphisme local ?

Correction.

Exercice 2. On considère la fonction $f(x) = \sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle un difféomorphisme ?
2. Déterminer les points $x \in \mathbb{R}$ où f est un difféomorphisme local.
3. Mêmes questions pour la fonction $g(x) = x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction.

Exercice 3. On considère l'application « coordonnées polaires » $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par

$$f(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

1. Montrer que f est différentiable et surjective.
2. f est-elle un difféomorphisme ?
3. Déterminer les points $(\theta, r) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ où f est un difféomorphisme local, et donner la formule de l'inverse local.

Correction.

1. f est différentiable (et même C^1) car chaque composante l'est (par théorèmes usuels).

   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on peut choisir $\theta = \arg z$ et $r = |z|$, ce qui donne bien un antécédent par f, puisque $f(\theta, r) = (x, y)$. Donc f est surjective.
2. f n'est pas un difféomorphisme car elle n'est pas injective : $f(0, r) = f(2\pi, r)$.
3. Puisque f est C^1, et définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui est un Banach, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est un Banach, par le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local en (θ, r) si et seulement si $Df(\theta, r)$ est inversible. On calcule donc cette différentielle (qui est une matrice 2×2) :

   $$Df(\theta, r) = \begin{pmatrix} D(r\cos\theta) \\ D(r\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}.$$

   On voir que $\det(Df(\theta, r)) = -r \neq 0$, donc cette différentielle est inversible en tout point $(\theta, r) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Donc f est un difféomorphisme local en tout point (θ, r). Fixons (θ_0, r_0) et calculons une formule pour l'inverse de f au voisinage de (θ_0, r_0) (donc f^{-1} doit être définie au voisinage de $(x_0, y_0) = f(\theta_0, r_0)$).

Étant donné (x, y) proche de (x_0, y_0), nous devons retrouver (θ, r) proches de (θ_0, r_0) tels que $f(\theta, r) = (x, y)$.
Il est clair que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; il reste à trouver l' « angle » $\theta \in \mathbb{R}$ qui représente le point (x, y) dans le cercle de rayon r *et qui soit proche de* θ_0 [Faire un dessin !].

1er cas, $x_0 \neq 0$. Dans ce cas, x reste non nul au voisinage de x_0, et on peut utiliser la formule $\theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi$. [Faire un dessin du graphe de tan et arctan]. Si on fixe l'entier k pour que cette formule soit valable en (θ_0, r_0) :

$$k := \frac{\theta_0 - \arctan \frac{y_0}{x_0}}{\pi} ,$$

on voit que la fonction $t \mapsto \arctan t + k\pi$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, intervalle ouvert qui contient par définition θ_0. L'inverse local de f (qui est unique) est donc donné près de (x_0, y_0) par

$$\left(\theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\right) .$$

2ème cas, $x_0 = 0$ Dans ce cas, on a $y_0 \neq 0$ et on peut utiliser la formule complémentaire $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$; donc

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \arctan \frac{x}{y} + k\pi ,$$

et on détermine l'entier k comme précédemment en demandant que la formule soit valable en (θ_0, r_0).

Exercice 4. Soit E un espace de Banach

1. Montrer qu'il existe des voisinages de l'identité U et V dans $\mathcal{L}_c(E)$ tels que tout opérateur $A \in V$ admet une unique racine carrée $A^{1/2}$ dans U. On pourra considérer l'application $f : B \mapsto B^2$ de $\mathcal{L}_c(E)$ dans lui-même.
2. Peut-on généraliser à la racine p-ième $A^{1/p}$ pour un entier $p \geqslant 2$?
3. On suppose ici $E = \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Remarquer que $J^2 = I$. Montrer qu'il n'existe pas d'application « racine carrée » g, différentiable, définie au voisinage de I, telle que $g(I) = J$.

   Indication : on pourra calculer $Df(J) \cdot H$ où $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. L'application f est C^1 de différentielle $Df(B) \cdot H = BH + HB$, donc $Df(I) \cdot H = 2H$. L'application linéaire $Df(I)$ est donc bien inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I dans $\mathcal{L}_c(E)$ tel que $f|_U : U \to V = f(U)$ soit un difféomorphisme de classe C^1. Alors, l'application réciproque

$g : V \to U$ associe à tout $A \in V$ un unique élément $g(A)$, tel que $f(g(A)) = A$ i.e. $(g(A))^2 = A$ donc tout élément $A \in V$, admet une unique « racine carrée » $A^{1/2} := g(A)$.

2. On peut considérer l'application $f : B \mapsto B^p$ de $\mathcal{L}_c(E)$ dans lui-même. L'application f est « polynomiale » donc C^1, en développant $(I + H)^p$ et en remarquant que I et H commutent, on trouve que la différentielle de f en I est $Df(I) \cdot H = pH$, $Df(I)$ est donc bien inversible. On termine de la même manière : l'application du théorème d'inversion locale donne l'existence d'un voisinage ouvert U de I dans $\mathcal{L}_c(E)$ tel que $f|_U : U \to V = f(U)$ soit un difféomorphisme de classe C^1. Alors, l'application réciproque $g : V \to U$ associe à tout $A \in V$ un unique élément $g(A)$, tel que $f(g(A)) = A$ i.e. $(g(A))^p = A$ donc tout élément $A \in V$, admet une unique « racine p-ième » $A^{1/p} := g(A)$.

3. On a $Df(J).H = JH + HJ$, alors pour $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Df(J).H = 0$ donc $Df(J)$ n'est pas injective (n'est alors pas surjective, puisqu'on est en dimension finie).

   On rappelle (vu en cours) que ça contredit l'existence d'un inverse différentiable : supposons qu'il existe une application $g : U \to V$, U voisinage ouvert de I et V voisinage ouvert de J, telle que $g(I) = J$ et pour tout $A \in U$, $(g(A))^2 = A$ i.e. pour tout $A \in U$ $f \circ g(A) = I(A) = A$.

   En prenant la différentielle en $A = I$, on aura $Df(g(I)) \circ Dg(I) = \mathrm{Id}$ (Id étant l'identité de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$). Alors pour tout $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $Df(J)(Dg(I).H) = H$, ce qui contredit le fait que $Df(J)$ ne soit pas surjective. Il n'existe donc pas de telle application « racine carrée » g.

Exercice 5. (Fonctions implicites) Soit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$. On se fixe un point $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ tel que $z_0 \neq 0$.

1. Montrer par un calcul direct qu'il existe un voisinage V de p dans S^2, et un voisinage U de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, tel que tout point de V est « paramétré par U », c'est-à-dire qu'il existe une application C^1 $h : U \to \mathbb{R}$ telle que tout point de V a pour coordonnées $(x, y, z = h(x, y))$.
2. Retrouver le résultat par le théorème d'inversion locale. On pourra considérer l'application $(x, y, z) \mapsto (x, y, x^2 + y^2 + z^2)$.

Correction.

1. Supposons $z_0 > 0$. Alors, l'ouvert $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ voisinage p dans S^2, est le graphe de l'application C^∞, $h : U \to \mathbb{R}$ définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ par $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, i.e.
   $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1,\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$.

   Si $z_0 < 0$, on prend la branche négative i.e. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < 1,\ z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ est le graphe de $-h$.
2. Le calcul la différentielle au point p de l'application de classe C^∞, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2 + z^2)$, fournit (par identification avec sa

matrice jacobienne) $Df(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \end{pmatrix}$ qui est inversible puisque $z_0 \neq 0$.
Appliquons alors le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U_1 de p dans $\mathbb{R}^3$ tel que $f|_{U_1} : U_1 \to f(U_1)$ soit un difféomorphisme de classe C^1. Soit $g : f(U_1) \to U_1$, $g(X,Y,Z) = (g_1(X,Y,Z), g_2(X,Y,Z), g_3(X,Y,Z))$ son application inverse. On a $g(x,y,x^2+y^2+z^2) = g(f(x,y,z)) = (x,y,z)$ sur U_1, donc pour tout $(x,y,z) \in U_1 \cap S^2$, on aura $g(x,y,1) = (x,y,z)$ d'où $z = g_3(x,y,1)$. Ainsi le voisinage $V = U_1 \cap S^2$ de p dans S^2 est le graphe de l'application C^∞, $h : U \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = g_3(x,y,1)$, où U est l'image de U_1 par la projection qui oublie z.