Calcul différentiel — TD 10 avec corrections

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1. Question de cours.
Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction à plusieurs variables.

Correction. Voir le cours, théorème 5.29.

Exercice 2. Question de cours.
Soit $B : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x, \quad y) & \mapsto B(x,y) \end{cases}$ une forme bilinéaire.

1. Calculer $D^k B(x,y)$ pour tout entier $k \geqslant 0$.
2. Écrire la formule de Taylor de $B(x,y)$ à l'ordre 7.
3. Mêmes questions pour la *forme quadratique* $x \mapsto Q(x) = B(x,x)$.

Correction.

1. On sait par le cours (exemple 4.29), ou on retrouve facilement, que B est C^∞ et sa différentielle en (x,y) est l'application linéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (automatiquement continue par la dimension finie) donnée par

$$DB(x,y) \cdot (h_1,h_2) = B(h_1,y) + B(x,h_2)\,.$$

On remarque sur cette formule que l'application $(x,y) \mapsto DB(x,y)$ est aussi linéaire (de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$). Sa différentielle est donc constante : $D(DB)(x,y) = DB$, c'est-à-dire

$$D(DB)(x,y) \cdot (a,b) = DB(a,b) = \Big((h_1,h_2) \mapsto B(h_1,b) + B(a,h_2)\Big)\,,$$

ce qui indique que $D^2B(x,y)$ est la forme bilinéaire symétrique donnée par

$$D^2B(x,y)\big((a,b),(h_1,h_2)\big) = B(h_1,b) + B(a,h_2)\,.$$

Puisque $D^2B(x,y)$ ne dépend pas de (x,y), sa différentielle est nulle :

$$\forall k \geqslant 3, \qquad D^kB(x,y) = 0\,.$$

2. La série de Taylor de f d'ordre $\geqslant 2$ est donc exacte (le terme de reste intégral est nul) :

$$B(x+h_1, y+h_2) = B(x,y) + DB(x,y)\cdot(h_1,h_2) + \frac{1}{2} D^2B(x,y)\cdot((h_1,h_2),(h_1,h_2))\,,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} B(x+h_1, y+h_2) &= B(x,y) + \quad B(h_1,y) + B(x,h_2) + \quad \frac{1}{2}(B(h_1,h_2) + B(h_1,h_2)) \\ &= B(x,y) + B(h_1,y) + B(x,h_2) + B(h_1,h_2)\,. \end{aligned}$$

Bien entendu, cette formule se vérifie aussi directement en développant $B(x+h_1, y+h_2)$ par bilinéarité.

3. Puisque $Q(x) = B \circ \mathcal{D}(x)$ où $\mathcal{D}$ est l'application linéaire $\mathcal{D}(x) = (x,x)$, on a $DQ(x) = DB(x,x) \circ \mathcal{D}$; ainsi, on déduit des questions précédentes :

$$DQ(x) \cdot h = Q(x,h) + Q(h,x), \qquad D^2Q(x) \cdot (h,a) = Q(a,h) + Q(h,a)\,,$$

et $D^kQ = 0$ pour $k \geqslant 3$. La formule de Taylor est exacte (sans reste) et donne

$$\begin{aligned} Q(x+h) &= Q(x) + DQ(x) \cdot h + \frac{1}{2}D^2Q(x) \cdot (h,h) \\ &= Q(x) + Q(x,h) + Q(h,x) + Q(h,h)\,. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ une application de classe C^2 telle que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $f(tx) = t^2 \cdot f(x)$. Montrer que, pour tout $x \in E$, $D^2f(0)(x,x) = 2f(x)$.

Correction.
Fixons $x \in E$, et dérivons par rapport à t les deux membres de l'égalité $f(tx) = t^2 \cdot f(x)$. On obtient

$$Df(tx) \cdot x = 2t \cdot f(x)\,.$$

(Justifiez le calcul !)
En dérivant encore une fois, on trouve

$$D^2f(tx) \cdot (x,x) = 2f(x)\,,$$

(justifiez le calcul !) et la conclusion s'obtient en $t = 0$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$. Définir la notion de maximum local et de minimum local pour f, strict et non strict.

Correction. Le point $a \in E$ est un maximum local de f s'il existe un voisinage ouvert U de a (on peut suppposer que c'est une boule ouverte) tel quel

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leqslant f(a)\,.$$

C'est un maximum local strict s'il existe un voisinage ouvert U de a (on peut suppposer que c'est une boule ouverte) tel quel

$$\forall x \in U \setminus \{a\}, \quad f(x) < f(a)\,.$$

Je vous laisser adapter pour les minimas.

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une application de classe C^∞. On suppose que $Df(0)=0$ et que pour tout $h\in\mathbb{R}^n\setminus 0$, $D^2f(0)\cdot(h,h)>0$.

1. Montrer qu'il existe $C>0$ tel que $D^2f(0)\cdot(h,h)\geqslant C\left\|h\right\|^2$ pour tous $h\in\mathbb{R}^n$ (et pour une norme $\left\|\cdot\right\|$ quelconque).
2. Montrer que l'origine $0\in\mathbb{R}^n$ est un minimum local de f.

Correction.

1. Soit $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ définie par $\phi(x)=D^2f(0)\cdot(x,x)$.
   Comme $S=\{x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|=1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ et ϕ est continue, il existe $a\in S$ tel que $\min_{x\in S}\phi(x)=\phi(a)$. On pose $\phi(a)=C$, alors $C>0$ et pour tout $x\in S$, $\phi(x)\geqslant C$.
   Maintenant, pour $h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\frac{h}{\|h\|}\in S$ d'où
   $$\phi(h)=\phi(\|h\|\frac{h}{\|h\|})=D^2f(0)\cdot(\|h\|\frac{h}{\|h\|},\|h\|\frac{h}{\|h\|})=\left\|h\right\|^2\phi(\frac{h}{\|h\|})\geqslant C\left\|h\right\|^2.$$
   Cette inégalité est encore valable pour $h=0$.
2. Du DL à l'ordre 2 de f en 0 et de l'inégalité établie en 1. on a
   $$f(x)-f(0)=\frac{1}{2}D^2f(0)\cdot(x,x)+o(\|x\|^2)\geqslant\frac{C}{2}\left\|x\right\|^2+o(\|x\|^2)=\left\|x\right\|^2(\frac{C}{2}+\frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2}).$$
   Comme $\lim_{x\to 0}\frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2}=0$ et que $\frac{C}{4}>0$, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour $\|x\|<\varepsilon$
   $\frac{|o(\|x\|^2)|}{\|x\|^2}\leqslant\frac{C}{4}$, d'où $\frac{C}{2}+\frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2}\geqslant\frac{C}{2}-\frac{C}{4}=\frac{C}{4}$.
   Ainsi, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour $\|x\|<\varepsilon$ on a $f(x)-f(0)\geqslant\frac{C}{4}\left\|x\right\|^2\geqslant 0$, donc l'origine est un minimum local de f.