Calcul différentiel — TD 10

Difféomorphismes et inversion locale

Exercice 1. Question de cours.
Qu'est-ce qu'un difféomorphisme ? Un C^1-difféomorphisme ? Un difféomorphisme local ?

Exercice 2. On considère la fonction $f(x) = \sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle un difféomorphisme ?
2. Déterminer les points $x \in \mathbb{R}$ où f est un difféomorphisme local.
3. Mêmes questions pour la fonction $g(x) = x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. On considère l'application « coordonnées polaires » $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par

$$f(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta) .$$

1. Montrer que f est différentiable et surjective.
2. f est-elle un difféomorphisme ?
3. Déterminer les points $(\theta, r) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ où f est un difféomorphisme local, et donner la formule de l'inverse local.

Exercice 4. Soit E un espace de Banach

1. Montrer qu'il existe des voisinages de l'identité U et V dans $\mathcal{L}_c(E)$ tels que tout opérateur $A \in V$ admet une unique racine carrée $A^{1/2}$ dans U. On pourra considérer l'application $f : B \mapsto B^2$ de $\mathcal{L}_c(E)$ dans lui-même.
2. Peut-on généraliser à la racine p-ième $A^{1/p}$ pour un entier $p \geqslant 2$?
3. On suppose ici $E = \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Remarquer que $J^2 = I$. Montrer qu'il n'existe pas d'application « racine carrée » g, différentiable, définie au voisinage de I, telle que $g(I) = J$.

   Indication : on pourra calculer $Df(J) \cdot H$ où $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (Fonctions implicites) Soit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$. On se fixe un point $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ tel que $z_0 \neq 0$.

1. Montrer par un calcul direct qu'il existe un voisinage V de p dans S^2, et un voisinage U de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, tel que tout point de V est « paramétré par U », c'est-à-dire qu'il existe une application C^1 $h : U \to \mathbb{R}$ telle que tout point de V a pour coordonnées $(x, y, z = h(x, y))$.
2. Retrouver le résultat par le théorème d'inversion locale. On pourra considérer l'application $(x, y, z) \mapsto (x, y, x^2 + y^2 + z^2)$.