Calcul différentiel — TD 10

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1. Question de cours.
Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction à plusieurs variables.

Exercice 2. Question de cours.
Soit $B : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x, \quad y) & \mapsto B(x,y) \end{cases}$ une forme bilinéaire.

1. Calculer $D^k B(x,y)$ pour tout entier $k \geqslant 0$.
2. Écrire la formule de Taylor de $B(x,y)$ à l'ordre 7.
3. Mêmes questions pour la *forme quadratique* $x \mapsto Q(x) = B(x,x)$.

Exercice 3. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ une application de classe C^2 telle que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $f(tx) = t^2 \cdot f(x)$. Montrer que, pour tout $x \in E$, $D^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$. Définir la notion de maximum local et de minimum local pour f, strict et non strict.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞. On suppose que $Df(0) = 0$ et que pour tout $h \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, $D^2 f(0) \cdot (h,h) > 0$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $D^2 f(0) \cdot (h,h) \geqslant C \|h\|^2$ pour tous $h \in \mathbb{R}^n$ (et pour une norme $\|\cdot\|$ quelconque).
2. Montrer que l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local de f.