Calcul différentiel — TD 9 avec corrections

Théorème d'inversion locale

Exercice 1. Soit E un espace de Banach

1. Montrer qu'il existe des voisinages de l'identité U et V dans $\mathcal{L}(E)$ tels que tout opérateur $A \in V$ admet une unique racine carrée $A^{1/2}$ dans U. On pourra considérer l'application $f : B \mapsto B^2$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même.
2. Peut-on généraliser à la racine p-ième $A^{1/p}$ pour un entier $p \geqslant 2$?
3. On suppose ici $E = \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Remarquer que $J^2 = I$. Montrer qu'il n'existe pas d'application « racine carrée » g, différentiable, définie au voisinage de I, telle que $g(I) = J$.

   Indication : on pourra calculer $Df(J) \cdot H$ où $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. L'application f est C^1 de différentielle $Df(B) \cdot H = BH + HB$, donc $Df(I) \cdot H = 2H$. L'application linéaire $Df(I)$ est donc bien inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f|_U : U \to V = f(U)$ soit un difféomorphisme de classe C^1. Alors, l'application réciproque $g : V \to U$ associe à tout $A \in V$ un unique élément $g(A)$, tel que $f(g(A)) = A$ i.e. $(g(A))^2 = A$ donc tout élément $A \in V$, admet une unique « racine carrée » $A^{1/2} := g(A)$.
2. On peut considérer l'application $f : B \mapsto B^p$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même. L'application f est « polynomiale » donc C^1, en développant $(I + H)^p$ et en remarquant que I et H commutent, on trouve que la différentielle de f en I est $Df(I) \cdot H = pH$, $Df(I)$ est donc bien inversible. On termine de la même manière : l'application du théorème d'inversion locale donne l'existence d'un voisinage ouvert U de I dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f|_U : U \to V = f(U)$ soit un difféomorphisme de classe C^1. Alors, l'application réciproque $g : V \to U$ associe à tout $A \in V$ un unique élément $g(A)$, tel que $f(g(A)) = A$ i.e. $(g(A))^p = A$ donc tout élément $A \in V$, admet une unique « racine p-ième » $A^{1/p} := g(A)$.
3. On a $Df(J).H = JH + HJ$, alors pour $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Df(J).H = 0$ donc $Df(J)$ n'est pas injective (n'est alors pas surjective, puisqu'on est en dimension finie).

   On rappelle (vu en cours) que ça contredit l'existence d'un inverse différentiable : supposons qu'il existe une application $g : U \to V$, U voisinage ouvert de I et V voisinage ouvert de J, telle que $g(I) = J$ et pour tout $A \in U$, $(g(A))^2 = A$ i.e. pour tout $A \in U$ $f \circ g(A) = I(A) = A$.

En prenant la différentielle en $A = I$, on aura $Df(g(I)) \circ Dg(I) = \mathrm{Id}$ (Id étant l'identité de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$). Alors pour tout $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $Df(J)(Dg(I).H) = H$, ce qui contredit le fait que $Df(J)$ ne soit pas surjective. Il n'existe donc pas de telle application « racine carrée » g.

Exercice 2. (Fonctions implicites) Soit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$. On se fixe un point $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ tel que $z_0 \neq 0$.

1. Montrer par un calcul direct qu'il existe un voisinage V de p dans S^2, et un voisinage U de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, tel que tout point de V est « paramétré par U », c'est-à-dire qu'il existe une application $h : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que tout point de V a pour coordonnées $(x, y, z = h(x, y))$.
2. Retrouver le résultat par le théorème d'inversion locale. On pourra considérer l'application $(x, y, z) \mapsto (x, y, x^2 + y^2 + z^2)$.

Correction.

1. Supposons $z_0 > 0$. Alors, l'ouvert $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ voisinage p dans S^2, est le graphe de l'application C^∞, $h : U \to \mathbb{R}$ définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ par $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, i.e.
$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1,\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$.
Si $z_0 < 0$, on prend la branche négative i.e. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < 1,\ z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ est le graphe de $-h$.
2. Le calcul la différentielle au point p de l'application de classe C^∞, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2 + z^2)$, fournit (par identification avec sa matrice jacobienne) $Df(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \end{pmatrix}$ qui est inversible puisque $z_0 \neq 0$.
Appliquons alors le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U_1 de p dans $\mathbb{R}^3$ tel que $f|_{U_1} : U_1 \to f(U_1)$ soit un difféomorphisme de classe C^1. Soit $g : f(U_1) \to U_1$, $g(X, Y, Z) = (g_1(X, Y, Z), g_2(X, Y, Z), g_3(X, Y, Z))$ son application inverse. On a $g(x, y, x^2 + y^2 + z^2) = g(f(x, y, z)) = (x, y, z)$ sur U_1, donc pour tout $(x, y, z) \in U_1 \cap S^2$, on aura $g(x, y, 1) = (x, y, z)$ d'où $z = g_3(x, y, 1)$. Ainsi le voisinage $V = U_1 \cap S^2$ de p dans S^2 est le graphe de l'application C^∞, $h : U \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = g_3(x, y, 1)$, où U est l'image de U_1 par la projection qui oublie z.

Exercice 3. Pour $d \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{U}_d$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaires de degré d, c'est-à-dire de la forme

$$P(X) = X^d + \sum_{j=0}^{d-1} a_j X^j \qquad a_j \in \mathbb{R}\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{U}_d$ est un espace affine ; quel est l'espace vectoriel associé ?

2. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'application « produit » :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U}_p \times \mathcal{U}_q &\to \mathcal{U}_{p+q} \\ (P, Q) &\mapsto PQ\,. \end{aligned}$$

Montrer que f est un difféomorphisme local en (P, Q) si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

Correction.

1. On remarque que $X^d \in \mathcal{U}_d$ et qu'on a un isomorphisme :

$$\mathbb{R}_{d-1}[X] \to \mathcal{U}_d \tag{1}$$
$$R \mapsto X^d + R \tag{2}$$

donc $\mathcal{U}_d$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ (polynômes de degrés $\leqslant d-1$.)

2. Par le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local en (P, Q) si et seulement si la différentielle $Df(P, Q)$ est inversible de $\mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{q-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_{p+q-1}[X]$.
On calcule facilement (en développant $f(P + H, Q + L)$, — ou bien on applique le cours, puisque f est la restriction à $\mathcal{U}_p \times \mathcal{U}_q$ d'une application *bilinéaire* sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$), la différentielle de f au point (P, Q) :

$$Df(P, Q) \cdot (H, L) = PL + QH, \qquad \forall (H, L) \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{q-1}[X]\,.$$

Si P, Q ne sont pas premiers entre eux, ils ont un diviseur commun de degré $\geqslant 1$: il existe un polynôme R tel que $P = P_1 R$ et $Q = Q_1 R$ pour des polynômes P_1, Q_1 (donc non nuls et de degrés respectifs $\leqslant p-1$ et $\leqslant q-1$). Donc en choisissant $(H, L) = (-P_1, Q_1)$ on a $PL + QH = P_1 Q_1 (R - R) = 0$, c'est dire que $Df(P, Q)$ n'est pas injective (on a un élément de $\mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{q-1}[X]$ non nul dans le noyau).
Réciproquement, supposons P, Q premiers entre eux, et $(H, L) \in \mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{q-1}[X]$ dans le noyau de $Df(P, Q)$, c'est-à-dire $PL + QH = 0$. Donc $PL = -QH$. Par le lemme de Gauss, PL étant divisible par Q, L serait divisible par Q ; de même H serait divisible par P : on a $H = P_1 P$ et $L = Q_1 Q$. Pour raison de degré, ce n'est possible que si $H = 0$ et $L = 0$. Donc, si P, Q sont premiers entre eux, $Df(P, Q)$ doit être injective.
Conclusion, P, Q sont premiers entre eux si et seulement si $Df(P, Q)$ est injective (donc bijective).