Calcul différentiel — TD 9 avec corrections

Formule de la moyenne

Correction du QCM du 24/10/2023

Exercice 1. Question de cours. Enoncer la formule de la moyenne pour une application $f : I \to E$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé, en précisant les hypothèses sur f et E.

Correction. Si f est C^1 (ou alors continue, et C^1 par morceaux) et E est un Banach, alors pour tous $a, b \in I$,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2. Soit $(X, E), (Y, F)$ des espaces affine normés et $U \subset X$ un ouvert connexe.
Soit $f : U \to Y$ une application différentiable. On suppose que $Df(x) = 0$ pour tout x dans U. Montrer que f est constante.
Montrer que l'hypothèse de connexité est nécessaire (si $F \neq \{0\}$).

Correction. Soit $a \in U$, on définit $C_a = \{x \in U, f(x) = f(a)\}$. Montrons que C_a est un ouvert de U. Puisque U est ouvert, on peut trouver une boule ouvert $B(a, r)$, $r > 0$, contenue dans U. Pour tout $x \in B(a, r)$, le segment $[a, x] \subset B(a, r) \subset U$. Donc, puisque f est différentiable sur U, on peut écrire le théorème des accroissements finis :

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant \sup_{[a,x]} \|Df\| \, \|x - a\| = 0\,.$$

Donc $f(x) = f(a)$, c'est-à-dire $x \in C_a$. Donc $B(a, r) \subset C_a$, ce qui montre que C_a est ouvert.
D'autre part, le complémentaire de C_a dans U est clairement l'union de tous les C_b pour les b tels que $f(b) \neq f(a)$. Comme les C_b sont ouverts, cette union est ouverte, et donc le complémentaire de C_a est ouvert dans U.
C_a est donc à la fois ouvert et fermé dans U, et non vide (il contient a) ; puisque U est connexe, $C_a = U$, ce qui prouve bien que f est constante sur U.
Si U n'est pas connexe, on peut écrire $U = U_1 \sqcup U_2$, union disjointe de deux ouverts non vides. Soient $y_1 \neq y_2$ deux éléments de Y. La fonction définie par $f(x) = y_1$ sur U_1 et $f(x) = y_2$ sur U_2 est différentiable sur U (le vérifier !), de différentielle nulle (le vérifier !), mais n'est pas constante.

Exercice 3. Soient E un espace de Banach et $K : [0, 1] \times [0, 1] \to E$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ fixé, l'application $s \mapsto K(s, t)$ est continue de $[0, 1]$ dans E.
2. Montrer que l'application $f : t \mapsto \int_0^1 K(s, t)\,\mathrm{d}s$ est continue de $[0, 1]$ dans E.

3. On suppose que K est C^1. Montrer que f est C^1 sur $]0,1[$ et $f'(t) = \int_0^1 \partial_t K(s,t)\,\mathrm{d}s$. On pourra montrer en utilisant la formule de la moyenne que
$$K(s,t+h) - K(s,t) = h\partial_t K(s,t) + hg(s,t,h)$$
où g est une fonction continue telle que $g(s,t,0) = 0$.

Correction.

1. C'est la composée de $s \mapsto (s,t)$ et $(s,t) \mapsto K(s,t)$ qui sont toutes les deux continues.
2. On doit considérer $f(t_1) - f(t_2)$, c'est-à-dire
$$\int_0^1 (K(s,t_1) - K(s,t_2))\,\mathrm{d}s\,.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de K sur le compact $[0,1]^2$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\|K(s_1,t_1) - K(s_2,t_2)\|_E < \varepsilon$ dès que $\|(s_1,t_1) - (s_2,t_2)\|_\infty < \alpha$. Cette condition est vérifiée si $|t_1 - t_2| < \alpha$, et on obtient alors
$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_E \leqslant \int_0^1 \|K(s,t_1) - K(s,t_2)\|_E\,\mathrm{d}s < \varepsilon\,,$$
ce qui montre la continuité de f.
3. La fonction $t \mapsto K(s,t)$ est C^1 donc par la formule de la moyenne, si on fixe $t \in]0,1[$ et $|h| \leqslant h_0$ assez petit pour que $t \pm h_0 \in]0,1[$, on a
$$\begin{aligned} K(s,t+h) - K(s,t) &= h\int_0^1 \partial_t K(s,t+uh)\,\mathrm{d}u &(1)\\ &= h\partial_t K(s,t) + h\int_0^1 (\partial_t K(s,t+uh) - \partial_t K(s,t))\,\mathrm{d}u\,. &(2)\end{aligned}$$
La fonction $g(s,t,h) := \int_0^1 (\partial_t K(s,t+uh) - \partial_t K(s,t))\,\mathrm{d}u$ est continue comme en question 2), et on voit que $g(s,t,0) = 0$.
Tous les termes étant continus en s, on peut intégrer et on obtient
$$f(t+h) - f(t) = h\int_0^1 \partial_t K(s,t)\,\mathrm{d}s + h\int_0^1 g(s,t,h)\,\mathrm{d}s\,.$$
g étant uniformément continue sur le compact $[0,1] \times [0,1] \times [-h_0,h_0]$ (on pourrait aussi oublier t puisqu'il est fixé et considérer g comme fonction de (s,h) seulement), on a
$$\|g(s,t,h) - g(s,t,0)\| < \varepsilon$$
dès que $\|(s,t,h) - (s,t,0)\|$ est assez petit : autrement dit $\|g(s,t,h)\| < \varepsilon$ dès que $|h|$ est assez petit. Ceci montre que $\int_0^1 g(s,t,h)\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon$, et donc que, lorsque $h \to 0$,
$$f(t+h) - f(t) = h\int_0^1 \partial_t K(s,t)\,\mathrm{d}s + o(h)$$
ce qui prouve bien que f est dérivable en t et $f'(t) = \int_0^1 \partial_t K(s,t)\,\mathrm{d}s$. Ce dernier étant continu en t (comme en question 2), on en déduit que $f \in C^1$.

Exercice 4. Soient E un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \to E$ une application C^∞. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to E$ définie par $g(t) = f(t)/t$ s'étend en une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans E.

Correction. Par la formule de la moyenne (ou Taylor avec reste intégral à l'ordre 0)

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s = t\int_0^1 f'(ut)\,\mathrm{d}u,$$

donc pour $t \neq 0$, $g(t) = \int_0^1 f'(ut)\,\mathrm{d}u$.
Soit l'application $g : \mathbb{R} \times [0,1] \to E$ définie par $g(t) = \int_0^1 K(t,u)\,\mathrm{d}u$ où $K(t,u) = f'(tu)$ (qui est de classe C^1 dans $(\mathbb{R}\times[0,1])$. On applique les résultats de l'exercice 3., pour montrer que g restreinte est de classe C^1 sur $]a,b[$, $a < b$ quelconques, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $g'(t) = \int_0^1 uf''(tu)\,\mathrm{d}u$.
En utilisant un raisonnement par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g est de classe C^n et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient E un espace de Banach et $f : \mathbb{R}^2 \to E$ une application C^∞. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions g_1 et g_2, dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, E)$, telles que

$$f(x_1, x_2) = x_1 g_1(x_1, x_2) + x_2 g_2(x_1, x_2)$$

Généraliser pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans E.

Correction. Utilisons la formule de la moyenne sur le segment $[0, x]$ avec $x = (x_1, x_2)$. De façon plus générale dans $\mathbb{R}^n$, soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t) = tx$. D'après la formule de la moyenne on a

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^1 Df(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(tx) x_i dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \partial_{x_i} f(tx) dt.$$

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ on définit l'application $g_i : \mathbb{R}^n \to E$ par $g_i(x) := \displaystyle\int_0^1 \partial_{x_i} f(tx) dt$. Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, g_i est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ (par un raisonnement analogue à celui des exercices 3 ou 4) et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$