Calcul différentiel — TD 9

Formule de la moyenne

Correction du QCM du 24/10/2023

Exercice 1. Question de cours. Enoncer la formule de la moyenne pour une application $f : I \to E$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé, en précisant les hypothèses sur f et E.

Exercice 2. Soit $(X, E), (Y, F)$ des espaces affine normés et $U \subset X$ un ouvert connexe.
Soit $f : U \to Y$ une application différentiable. On suppose que $Df(x) = 0$ pour tout x dans U. Montrer que f est constante.
Montrer que l'hypothèse de connexité est nécessaire (si $F \neq \{0\}$).

Exercice 3. Soient E un espace de Banach et $K : [0, 1] \times [0, 1] \to E$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$ fixé, l'application $s \mapsto K(s, t)$ est continue de $[0, 1]$ dans E.
2. Montrer que l'application $f : t \mapsto \int_0^1 K(s, t)\, \mathrm{d}s$ est continue de $[0, 1]$ dans E.
3. On suppose que K est C^1. Montrer que f est C^1 sur $]0, 1[$ et $f'(t) = \int_0^1 \partial_t K(s, t)\, \mathrm{d}s$. On pourra montrer en utilisant la formule de la moyenne que

$$K(s, t + h) - K(s, t) = h\partial_t K(s, t) + hg(s, t, h)$$

où g est une fonction continue telle que $g(s, t, 0) = 0$.

Exercice 4. Soient E un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \to E$ une application C^∞. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to E$ définie par $g(t) = f(t)/t$ s'étend en une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans E.

Exercice 5. Soient E un espace de Banach et $f : \mathbb{R}^2 \to E$ une application C^∞. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions g_1 et g_2, dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, E)$, telles que

$$f(x_1, x_2) = x_1 g_1(x_1, x_2) + x_2 g_2(x_1, x_2)$$

Généraliser pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans E.