# Calcul différentiel — TD 9

Théorème d'inversion locale

**Exercice 1.** Soit $E$ un espace de Banach

1. Montrer qu'il existe des voisinages de l'identité $U$ et $V$ dans $\mathcal{L}(E)$ tels que tout opérateur $A \in V$ admet une unique racine carrée $A^{1/2}$ dans $U$. On pourra considérer l'application $f : B \mapsto B^2$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même.
2. Peut-on généraliser à la racine $p$-ième $A^{1/p}$ pour un entier $p \geqslant 2$ ?
3. On suppose ici $E = \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Remarquer que $J^2 = I$. Montrer qu'il n'existe pas d'application « racine carrée » $g$, différentiable, définie au voisinage de $I$, telle que $g(I) = J$.

   *Indication :* on pourra calculer $Df(J) \cdot H$ où $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2. (Fonctions implicites)** Soit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$. On se fixe un point $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ tel que $z_0 \neq 0$.

1. Montrer par un calcul direct qu'il existe un voisinage $V$ de $p$ dans $S^2$, et un voisinage $U$ de $(x_0, y_0)$ dans $\mathbb{R}^2$, tel que tout point de $V$ est « paramétré par $U$ », c'est-à-dire qu'il existe une application $h : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que tout point de $V$ a pour coordonnées $(x, y, z = h(x, y))$.
2. Retrouver le résultat par le théorème d'inversion locale. On pourra considérer l'application $(x, y, z) \mapsto (x, y, x^2 + y^2 + z^2)$.

**Exercice 3.** Pour $d \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{U}_d$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaires de degré $d$, c'est-à-dire de la forme

$$P(X) = X^d + \sum_{j=0}^{d-1} a_j X^j \qquad a_j \in \mathbb{R}\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{U}_d$ est un espace affine ; quel est l'espace vectoriel associé ?
2. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit $f$ l'application « produit » :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U}_p \times \mathcal{U}_q &\to \mathcal{U}_{p+q} \\ (P, Q) &\mapsto PQ\,. \end{aligned}$$

   Montrer que $f$ est un difféomorphisme local en $(P, Q)$ si et seulement si $P$ et $Q$ sont premiers entre eux.