Calcul différentiel — TD 8 avec corrections

Formule de la moyenne, difféomorphismes

Exercice 1. Question de cours. Énoncer la formule de la moyenne *sur un segment* pour une application $f : U \to F$, où U est un ouvert de E, et E et F sont des espaces vectoriels normés, en précisant les hypothèses sur f et F.

Correction. Si f est C^1 (ou alors continue, et C^1 par morceaux) et F est un **Banach**, soient x_0 et x_1 deux points de U tels que le segment $[x_0, x_1]$ soit contenu dans U. Alors

$$f(x_1) - f(x_0) = \int_0^1 Df(x_0 + t(x_1 - x_0)) \cdot (x_1 - x_0)\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 2. Soit $(X, E), (Y, F)$ des espaces affine normés et $U \subset X$ un ouvert connexe.
Soit $f : U \to Y$ une application différentiable. On suppose que $Df(x) = 0$ pour tout x dans U. Montrer que f est constante.
Montrer que l'hypothèse de connexité est nécessaire (si $F \neq \{0\}$).

Correction. Soit $a \in U$, on définit $C_a = \{x \in U, f(x) = f(a)\}$. Montrons que C_a est un ouvert de U. Puisque U est ouvert, on peut trouver une boule ouvert $B(a, r)$, $r > 0$, contenue dans U. Pour tout $x \in B(a, r)$, le segment $[a, x] \subset B(a, r) \subset U$. Donc, puisque f est différentiable sur U, on peut écrire le théorème des accroissements finis :

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant \sup_{[a,x]} \|Df\|\,\|x - a\| = 0\,.$$

Donc $f(x) = f(a)$, c'est-à-dire $x \in C_a$. Donc $B(a, r) \subset C_a$, ce qui montre que C_a est ouvert.
D'autre part, le complémentaire de C_a dans U est clairement l'union de tous les C_b pour les b tels que $f(b) \neq f(a)$. Comme les C_b sont ouverts, cette union est ouverte, et donc le complémentaire de C_a est ouvert dans U.
C_a est donc à la fois ouvert et fermé dans U, et non vide (il contient a) ; puisque U est connexe, $C_a = U$, ce qui prouve bien que f est constante sur U.
Si U n'est pas connexe, on peut écrire $U = U_1 \sqcup U_2$, union disjointe de deux ouverts non vides. Soient $y_1 \neq y_2$ deux éléments de Y. La fonction définie par $f(x) = y_1$ sur U_1 et $f(x) = y_2$ sur U_2 est différentiable sur U (le vérifier !), de différentielle nulle (le vérifier !), mais n'est pas constante.

Exercice 3. Soient E un espace de Banach et $f : \mathbb{R}^2 \to E$ une application C^∞. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions g_1 et g_2, dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, E)$, telles que

$$f(x_1, x_2) = x_1 g_1(x_1, x_2) + x_2 g_2(x_1, x_2)$$

Généraliser pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans E.

Correction. Utilisons la formule de la moyenne sur le segment $[0,x]$ avec $x=(x_1,x_2)$. De façon plus générale dans $\mathbb{R}^n$, soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Soit $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t)=tx$. D'après la formule de la moyenne on a

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^1 Df(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt=\int_0^1\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}f(tx)x_i dt=\sum_{i=1}^n x_i\int_0^1\partial_{x_i}f(tx)dt.$$

Pour $i\in\{1,\dots,n\}$ on définit l'application $g_i:\mathbb{R}^n\to E$ par $g_i(x):=\displaystyle\int_0^1\partial_{x_i}f(tx)dt$. Alors, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, g_i est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n,E)$ (par le théorème de dérivation sous l'intégrale — théorème 5.31 du poly) et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$,

$$f(x)=\sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

Dans les exercices suivants, on aura besoin de la définition de *difféomorphisme local* :

> Soit E,F des espaces vectoriels normés et $U\subset E$ un ouvert. On dit que $f:U\to F$ est un **difféomorphisme local** en $a\in U$ s'il existe un ouvert U' contenant a et un ouvert $V\subset F$ tel que la restriction de f à U' soit un difféo $U'\to V$.

Exercice 4. On considère la fonction $f(x)=\sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est-elle un difféomorphisme ?
2. Déterminer les points $x\in\mathbb{R}$ où f est un difféomorphisme local.
3. Mêmes questions pour la fonction $g(x)=x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction.

Exercice 5. On considère l'application « coordonnées polaires » $f:\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ donnée par

$$f(\theta,r)=(r\cos\theta,r\sin\theta)\,.$$

1. Montrer que f est différentiable et surjective.
2. f est-elle un difféomorphisme ?
3. Déterminer les points $(\theta,r)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ où f est un difféomorphisme local, et donner la formule de l'inverse local.

Correction.

1. f est différentiable (et même C^1) car chaque composante l'est (par théorèmes usuels).
   Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, on peut choisir $\theta=\arg z$ et $r=|z|$, ce qui donne bien un antécédent par f, puisque $f(\theta,r)=(x,y)$. Donc f est surjective.
2. f n'est pas un difféomorphisme car elle n'est pas injective : $f(0,r)=f(2\pi,r)$.

3. Puisque f est C^1, et définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui est un Banach, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est un Banach, par le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local en (θ, r) si et seulement si $Df(\theta, r)$ est inversible. On calcule donc cette différentielle (qui est une matrice 2×2) :

$$Df(\theta, r) = \begin{pmatrix} D(r\cos\theta) \\ D(r\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} .$$

On voir que $\det(Df(\theta, r)) = -r \neq 0$, donc cette différentielle est inversible en tout point $(\theta, r) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Donc f est un difféomorphisme local en tout point (θ, r).

Fixons (θ_0, r_0) et calculons une formule pour l'inverse de f au voisinage de (θ_0, r_0) (donc f^{-1} doit être définie au voisinage de $(x_0, y_0) = f(\theta_0, r_0)$).

Étant donné (x, y) proche de (x_0, y_0), nous devons retrouver (θ, r) proches de (θ_0, r_0) tels que $f(\theta, r) = (x, y)$.

Il est clair que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; il reste à trouver l' « angle » $\theta \in \mathbb{R}$ qui représente le point (x, y) dans le cercle de rayon r *et qui soit proche de* θ_0 [Faire un dessin !].

1er cas, $x_0 \neq 0$. Dans ce cas, x reste non nul au voisinage de x_0, et on peut utiliser la formule $\theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi$. [Faire un dessin du graphe de tan et arctan]. Si on fixe l'entier k pour que cette formule soit valable en (θ_0, r_0) :

$$k := \frac{\theta_0 - \arctan \frac{y_0}{x_0}}{\pi} ,$$

on voit que la fonction $t \mapsto \arctan t + k\pi$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, intervalle ouvert qui contient par définition θ_0. L'inverse local de f (qui est unique) est donc donné près de (x_0, y_0) par

$$\left(\theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\right) .$$

2ème cas, $x_0 = 0$ Dans ce cas, on a $y_0 \neq 0$ et on peut utiliser la formule complémentaire $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$; donc

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \arctan \frac{x}{y} + k\pi ,$$

et on détermine l'entier k comme précédemment en demandant que la formule soit valable en (θ_0, r_0).