Calcul différentiel — TD 8 avec corrections

Espaces de Banach et intégration

Exercice 1. Question de cours. Soit E un espace vectoriel normé et $f : [a,b] \to E$ une fonction. Qu'est-ce qu'une *somme de Riemann* de f ? Donner une condition sur f et E pour que cette somme de Riemann converge dans E.

Correction. $S_N(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(a + \frac{i}{N}(b-a))$. Si f est continue et E est un espace de Banach, $S_N(f)$ converge, et on note $\int_a^b f$ sa limite.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $x_0 \in E$. Montrer que la fonction $f(t) = g(t) \cdot x_0$ est continue de $[a,b]$ dans E et que $\int_a^b f = \left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot x_0$.

Correction. Écrire les sommes de Riemann et justifier soigneusement les interversions de limites (par exemple, par continuité du produit $\mathbb{R} \times E \to E$ — qui d'ailleurs sert également pour justifier la continuité de f).

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Soit $R > 0$.

1. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (R\cos t, R\sin t)$. Calculer
$$\int_0^\pi \left\|f'(t)\right\|_2 \mathrm{d}t$$
2. Soit $g : [-R,R] \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(s) = (s, \sqrt{R^2 - s^2})$. Calculer
$$\int_{-R}^{R} \left\|g'(s)\right\|_2 \mathrm{d}s.$$
3. Qu'ont f et g en commun qui pourrait expliquer la comparaison entre ces deux calculs ?
4. Soit E un espace vectoriel normé et $\gamma : [a,b] \to E$ un chemin de classe C^1. On appelle
$$\ell(\gamma) := \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| \mathrm{d}t$$
la « longueur du chemin γ ».
Soit $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une application C^1 monotone et surjective. Que vaut $\phi(\alpha)$? $\phi(\beta)$? Montrer que $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \phi)$, c'est-à-dire que $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \|(\gamma \circ \phi)'(s)\|\,\mathrm{d}s$.

Correction.

1. Ne pas oublier de justifier pourquoi f est bien dérivable. On trouve πR.
2. Attention c'est une intégrale généralisée. g est dérivable sur $]-R,R[$. On trouve $2\pi R(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \pi R$.

3. Les deux chemins ont la même image dans $\mathbb{R}^2$ (le demi-cercle supérieur). On peut passer de l'un à l'autre par changement de variable $\phi(t) = R\cos t$.
4. On suppose que ϕ est croissante. Alors, $\phi' \geqslant 0$, $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$.
D'où $\ell(\gamma\circ\phi) = \int_\alpha^\beta \|(\gamma\circ\phi)'(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \|(\gamma'(\phi(s))\cdot\phi'(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \|(\gamma'(\phi(s))\|\cdot\phi'(s)\,\mathrm{d}s$.
Alors, le changement de variable (non nécessairement bijectif) $t = \phi(s)$, nous donne
$$\int_\alpha^\beta \left\|(\gamma'(\phi(s))\right\|\cdot\phi'(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} \left\|(\gamma'(t)\right\|\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \left\|(\gamma'(t)\right\|\mathrm{d}t$$
d'où $\ell(\gamma) = \ell(\gamma\circ\phi)$.
Pour ϕ décroissante, on aura $\phi' \leqslant 0$, $\phi(\alpha) = b$, $\phi(\beta) = a$, et
$$\ell(\gamma\circ\phi) = \int_\alpha^\beta \left\|(\gamma'(\phi(s))\right\|\cdot(-\phi'(s))\,\mathrm{d}s \;=-\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} \left\|(\gamma'(t)\right\|\mathrm{d}t \;=\ell(\gamma).$$
On notera que les fonctions à intégrer sont toutes continues d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient E un espace de Banach (non nul) et $a < b$ des réels. On munit l'espace vectoriel $C^0([a,b];E)$ de la norme
$$\|f\|_1 = \int_a^b \|f(t)\|_E\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que l'application $I : f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire continue de $F := (C^0([a,b];E), \|\cdot\|_1)$ dans E. Quelle est sa norme ?
2. Soit $x_0 \in E\setminus\{0\}$. On définit la fonction $\chi(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } a \leqslant t < \frac{a+b}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{a+b}{2} \leqslant t \leqslant b \end{cases}$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $f_n \in F$ telle que $\int_a^b \|f_n(t) - \chi(t)\|\,\mathrm{d}t \to 0$ quand $n\to\infty$.
3. Montrer que la suite f_n est de Cauchy dans F.
4. Montrer que F n'est pas un espace de Banach.

Correction.

1. On sait que I est linéaire. On a $\|I(f)\| \leqslant \|f\|_1$ donc I est continue de norme $\leqslant 1$. La norme 1 est aisément atteinte en prenant une fonction f constante non nulle : $f(t) = x_0$, et $I(f) = (b-a)\cdot x_0$.
2. Notons $c = \frac{a+b}{2}$. On définit la fonction continue affine par morceaux f_n qui vaut x_0 sur $[a, c-\frac{1}{n}]$, qui vaut 0 sur $[c,b]$, et qui est affine sur $[c-\frac{1}{n}, c]$. (En formule : $f_n(t) = n(c-t)\cdot x_0$ sur cet intervalle.)
Alors, par Chasles, $\int_a^b = \int_a^{c-\frac{1}{n}} + \int_{c-\frac{1}{n}}^c + \int_c^b$ et on a :
$$\int_a^{c-\frac{1}{n}} \|f_n(t)-\chi(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^{c-\frac{1}{n}} (x_0 - x_0)\,\mathrm{d}t = 0,$$
et
$$\int_c^b \|f_n(t)-\chi(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_c^b (0-0)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Il reste

$$\int_{c-\frac{1}{n}}^{c} \|f_n(t) - \chi(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_{c-\frac{1}{n}}^{c} \|(n(c-t) - 1) \cdot x_0\| \,\mathrm{d}t = \left(\int_{c-\frac{1}{n}}^{c} |n(c-t) - 1| \,\mathrm{d}t \right) \|x_0\| \,.$$

L'intégrale de la fonction affine $|n(c-t) - 1|$ qui va de 0 à 1 vaut donc $1/2n$ (aire du triangle). Donc

$$\int_a^b \|f_n(t) - \chi(t)\| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n} \|x_0\| \,.$$

Ce qui tend vers 0 et donc répond à la question.

3. On a $\|f_n - f_m\|_1 = \int_a^b \|f_n(t) - f_m(t)\| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \|f_n(t) - \chi(t)\| \,\mathrm{d}t + \int_a^b \|\chi(t) - f_m(t)\| \,\mathrm{d}t$. Chacun des termes est $\leqslant \varepsilon$ pour n et m assez grands. Donc la suite (f_n) est de Cauchy.
4. (f_n) est une suite de Cauchy de F qui ne converge pas dans F, puisque $\chi \notin F$. En effet, supposons que (f_n) converge vers $f \in F$. On a alors $\|f_n - f\|_1 \to 0$. La norme $\|\cdot\|_1$ s'étend aux fonctions continues par morceaux, et on peut dans ce cas écrire le résultat du (2.) sous la forme $\|f_n - \chi\|_1 \to 0$. Par unicité de la limite dans cet espace, on a $f = \chi$, ce qui est absurde car χ n'est pas continue.