# Calcul différentiel — TD 8

Formule de la moyenne, difféomorphismes

**Exercice 1. Question de cours.** Énoncer la formule de la moyenne *sur un segment* pour une application $f : U \to F$, où $U$ est un ouvert de $E$, et $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels normés, en précisant les hypothèses sur $f$ et $F$.

**Exercice 2.** Soit $(X, E), (Y, F)$ des espaces affine normés et $U \subset X$ un ouvert connexe.
Soit $f : U \to Y$ une application différentiable. On suppose que $Df(x) = 0$ pour tout $x$ dans $U$. Montrer que $f$ est constante.
Montrer que l'hypothèse de connexité est nécessaire (si $F \neq \{0\}$).

**Exercice 3.** Soient $E$ un espace de Banach et $f : \mathbb{R}^2 \to E$ une application $C^\infty$. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_1$ et $g_2$, dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, E)$, telles que

$$f(x_1, x_2) = x_1 g_1(x_1, x_2) + x_2 g_2(x_1, x_2)$$

Généraliser pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $E$.

Dans les exercices suivants, on aura besoin de la définition de *difféomorphisme local* :

> Soit $E, F$ des espaces vectoriels normés et $U \subset E$ un ouvert. On dit que $f : U \to F$ est un **difféomorphisme local** en $a \in U$ s'il existe un ouvert $U'$ contenant $a$ et un ouvert $V \subset F$ tel que la restriction de $f$ à $U'$ soit un difféo $U' \to V$.

**Exercice 4.** On considère la fonction $f(x) = \sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La fonction $f$ est-elle un difféomorphisme ?
2. Déterminer les points $x \in \mathbb{R}$ où $f$ est un difféomorphisme local.
3. Mêmes questions pour la fonction $g(x) = x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 5.** On considère l'application « coordonnées polaires » $f : \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par

$$f(\theta, r) = (r \cos\theta, r \sin\theta) .$$

1. Montrer que $f$ est différentiable et surjective.
2. $f$ est-elle un difféomorphisme ?
3. Déterminer les points $(\theta, r) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ où $f$ est un difféomorphisme local, et donner la formule de l'inverse local.