Calcul différentiel — TD 7

Révision

Exercice 1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note

$$\|P\| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |P(x)| \qquad \text{et} \qquad N(P) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

1. Montrer que $\|\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Sont-elles équivalentes ? (on pourra utiliser la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$)

Correction.

1. Les conditions pour être une norme sont aisément vérifiées.
   $\|P\| = 0 \iff \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |P(x)| = 0 \implies$ le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$.
   $N(P) = 0 \iff \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = 0$, et $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0, \iff P = 0$.
2. On a $\|X^n - 0\| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |x^n| = \frac{1}{2^n}$, d'où la limite de la suite (X^n) dans $(\mathbb{R}[X], \|.\|)$ est 0. D'autre part, $N(X^n - 1) = \frac{1}{n}$, d'où la limite de la suite (X^n) dans $(\mathbb{R}[X], N)$ est 1. Les normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 2. Soit $E = C^0[0, \pi], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $\phi \in E - \{0\}$, on désigne par T_ϕ, l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $T_\phi(f) = \int_0^\pi \phi(x) f(x)\, dx$.

1. Montrer que T_ϕ est linéaire et continue et calculer sa norme.
2. On pose $F = \{f \in E\ ,\ f(0) = 0\}$ et $\phi = 1$. La restriction de T_1 à F est-elle continue ? sa norme est-elle atteinte ?
3. Etudier la continuité de T_ϕ sur $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$.

Correction.

1. L'application T_ϕ est clairement linéaire. Par l'inégalité

$$|T_\phi(f)| \leqslant \int_0^\pi |\phi(x) f(x)|\, dx \leqslant \|f\|_\infty \int_0^\pi |\phi(x)|\, dx$$

   ainsi T_ϕ est continue et $\|T_\phi\| \leqslant \int_0^\pi |\phi(x)|\, dx = \|\phi\|_1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = \dfrac{\phi}{|\phi| + \frac{1}{n}}$.
   Alors, $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$, $T_\phi(f_n) = \int_0^\pi \frac{\phi^2(x)}{|\phi(x)|+\frac{1}{n}}\, dx$ et

$$\left|T_\phi(f_n) - \int_0^\pi |\phi(x)|\, dx\right| = \left|-\int_0^\pi \frac{\phi(x)}{n|\phi(x)| + 1}\, dx\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^\pi \frac{|\phi(x)|}{|\phi(x)| + \frac{1}{n}}\, dx \leqslant \frac{1}{n}\int_0^\pi dx = \frac{\pi}{n}.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} T_\phi(f_n) = \|\phi\|_1$, par suite $\|T_\phi\| \geqslant \|\phi\|_1$. Donc $\|T_\phi\| = \|\phi\|_1$.

2. Cette norme est-elle atteinte lorsque ϕ est de signe constant ? Supposons par exemple,
que pour tout $x \in [0,\pi]$, $\phi(x) \geqslant 0$, si $f = 1$, alors $\|f\|_\infty = 1$ et
$$|T_\phi(f)| = \int_0^\pi |\phi(x)\ dx = \|f\|_\infty \int_0^\pi |\phi(x)|\ dx$$
la norme est donc atteinte.

3. D'après ce qui précède $\|T_1\| = \int_0^\pi dx = \pi$ et est atteinte pour $f = 1$.
Notons par $\tilde{T}_1$ la restriction de T_1 à F. $\tilde{T}_1$ est la restriction d'une application linéaire continue à un sous-espace, elle est donc linéaire continue et on a toujours $\|\tilde{T}_1\| \leqslant \|T_1\| = \pi$. Par contre, on ne peut pas utiliser la fonction $f = 1$ pour réaliser la norme, puisqu'elle n'appartient pas à F. On va alors modifier légèrement f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction affine par morceaux sur $[0,\pi]$ définie par $f_n(x) = nx$ sur $[0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 1$ sur $[\frac{1}{n}, \pi]$. Alors f_n est continue et s'annule en 0. De plus $\|f_n\|_\infty = 1$ et
$$\lim_{n\to\infty} |\tilde{T}_1(f_n)| = \lim_{n\to\infty} |T_1(f_n)| = \lim_{n\to\infty} (\int_0^{\frac{1}{n}} nx\ dx + \int_{\frac{1}{n}}^\pi dx) = \lim_{n\to\infty} (\pi + \frac{1}{2n}) = \pi$$
Ainsi, $\|\tilde{T}_1\| = \pi$.
Mais, la norme $\|\tilde{T}_1\|$ n'est pas atteinte. En effet, s'il existe $f \in F$, telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\tilde{T}_1(f)| = \pi$. Alors, $|f(x)| \leqslant 1$ et $|\int_0^\pi f(x)\ dx| = \pi = \int_0^\pi dx$, d'où
$$\int_0^\pi dx = |\int_0^\pi f(x)\ dx| \leqslant \int_0^\pi |f(x)|\ dx \leqslant \int_0^\pi dx \implies \int_0^\pi |f(x)|\ dx = \int_0^\pi dx.$$
Par suite de $\int_0^\pi (1 - |f(x)|)dx = 0$, comme $1 - |f|$ est continue de signe constant, on aura $|f| = 1$, ceci contredit l'hypothèse $f(0) = 0$.

4. Dans $(E, \|.\|_1)$, par l'inégalité
$$|T_\phi(f)| \leqslant \int_0^\pi |\phi(x)f(x)|\ dx \leqslant \|\phi\|_\infty \int_0^\pi |f(x)|\ dx = \|\phi\|_\infty \|f\|_1.$$
T_ϕ est continue et $\|T_\phi\| \leqslant \|\phi\|_\infty$.
Soit $x_0 \in [0,\pi]$ tel que $\|\phi\|_\infty = |\phi(x_0)| > 0$, (un tel point existe puisque ϕ est non nulle et continue sur $[0,\pi]$).
Soit $\varepsilon \in]0, \frac{|\phi(x_0)|}{2}[$, par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [0,\pi]$ on a $|\phi(x_0)| - \varepsilon \leqslant |\phi(x)|$.
On définit $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x - (x_0 - \delta) & \text{si } x \in [x_0 - \delta, x_0] \cap [0,\pi] \\ (x_0 + \delta) - x & \text{si } x \in [x_0, x_0 + \delta,] \cap [0,\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors g est continue, positive et l'application $f = g\frac{\phi}{|\phi|}$ sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [0, \pi]$ et nulle ailleurs, est aussi continue et

$$|T_\phi(f)| = \int_0^\pi |\phi(x)||f(x)|\, dx \geqslant (\|\phi\|_\infty - \varepsilon) \int_0^\pi |f(x)|\, dx = (\|\phi\|_\infty - \varepsilon)\|f\|_1.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{|\phi(x_0)|}{2}[$, on a $\|T_\phi\| \geqslant \|\phi\|_\infty - \varepsilon$, et le passage à la limite, $\varepsilon \to 0$, nous donne $\|T_\phi\| \geqslant \|\phi\|_\infty$, finalement $\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

5. Dans $(E, \|.\|_2)$, par l'inégalité de cauchy-Schwarz,

$$|T_\phi(f)| \leqslant \|\phi\|_2.\|f\|_2$$

d'où T_ϕ est continue et $\|T_\phi\| \leqslant \|\phi\|_2$. Pour $f = \phi$, on a $|T_\phi(\phi)| = \|\phi\|_2^2$, d'où $\|T_\phi\| = \|\phi\|_2$ (la norme est atteinte).

Exercice 3. 1. Soit N_1 la norme sur $E = \mathbb{R}^n$ définie par

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \ .$$

Montrer que N_1 est différentiable en un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ si et seulement si pour tous $i = 1, \dots, n$ $a_i \neq 0$. Calculer dans ce cas $DN_1(a)$.

2. Soit $E = \ell^1$ l'espace des suites de nombres réels $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$, muni de la norme $N_1(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|$.
Déterminer en quels points N_1 est différentiable

Correction.

1. $E = \mathbb{R}^n$.
   (a) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'application $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ défine par $h_i(x) = |x_i|$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{U} = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$, comme la composée de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = |t|$ et de la projection $P_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $h_i = g \circ P_i$. Ainsi $N_1 = \sum_{i=1}^n h_i$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{U} = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$.
   Réciproquement, si $a = (a_1, \dots, a_n) \notin \mathcal{U}$, $a_i = 0$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$. L'application partielle par rapport à la variable x_i au point a, est l'application $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_i(t) = |t| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |a_i|$. Elle n'est pas dérivable en $t = 0$, par suite N_1 ne sera pas différentiable au point a.
   On a donc montré que N_1 est différentiable en un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ si et seulement si $a \in \mathcal{U}$.
   (b) Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{U}$ alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i \neq 0$. Comme N_1 est différentiable en a, ses différentielles partielles $Df_i(a)$ existent et on a la relation suivante, pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$DN_1(a)(h) = \sum_{i=1}^n Df_i(a)h_i.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, comme $a_i \neq 0$, on a $|a_i| = sgn(a_i)a_i$ où est le signe de a_i, $sgn(a_i) := \frac{a_i}{|a_i|}$.

Alors, pour $t \neq 0$ assez petit, par exemple $0 < |t| < \frac{|a_i|}{|h_i|}$ si $h_i \neq 0$, on aura

$$\frac{f_i(a_i + th_i) - f_i(a_i)}{t} = \frac{|a_i + th_i| - |a_i|}{t} = \frac{sgn(a_i)(a_i + th_i) - sgn(a_i)(a_i)}{t} = sgn(a_i)h_i$$

D'où $Df_i(a)h_i = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{f_i(a_i+th_i)-f_i(a_i)}{t} = sgn(a_i)h_i$.

Finalement, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{U}$ et pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$DN_1(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} Df_i(a)h_i = \sum_{i=1}^{n} sgn(a_i)h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{|a_i|}h_i.$$

2. $E = \ell^1$.

   (a) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$., On remarque d'abord, que si l'un des x_i est nul, par exemple $x_0 = 0$, alors l'application $t \mapsto N(x + t(1, 0, 0, \dots) = |t| + \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|$ n'est pas dérivable en 0, car $t \mapsto |t|$ n'est pas dérivable en 0. Donc N n'est pas différentiable en ce point.
   Soit $x \in U = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1,\ x_n \neq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$. Soit $h = (h_i) \in E$. Alors, pour $t \neq 0$, $\left|\frac{|x_n+th_n|}{t} - \frac{|x_n|}{t}\right| \leqslant |h_n|$. Donc, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|x_n+th_n|}{t} - \frac{|x_n|}{t}\right)$ converge normalement pour $t \in]0, 1]$ et on peut intervertir limite et somme alors

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{N_1(x + th)}{t} - \frac{N_1(x)}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to 0} \left(\frac{|x_n + th_n|}{t} - \frac{|x_n|}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{|x_n|}h_n$$

   (b) Soit $x \in U$. Si N est différentiable en $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a nécessairement,

$$N(x + h) - N(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{|x_n|}h_n = o(N(h)).$$

   Soit $h^{(k)} = (h_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $h_n^{(k)} = 0$ si $n \neq k$ et $h_k^{(k)} = -2x_k$.
   Alors, $\lim_{k\to+\infty} N(h^{(k)}) = 0$ et

$$N(x + h^{(k)}) - N(x) - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x_n}{|x_n|}h_n^{(k)} = |x_k - 2x_k| - |x_k| + 2|x_k| = 2N(h^{(k)}),$$

   qui n'est pas un $o(N(h))$, donc N n'est pas différentiable en x. On a montré que N n'est différentiable en aucun point de E.
   En fait, N_1 est continue sur E, mais n'est différentiable en aucun point.
   Remarque : Dans ℓ^1, contrairement à la dimension finie, l'ensemble $U = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1,\ x_n \neq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un ouvert. En effet, toute boule centrée en $x \in U$, contient un élément $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ tel que $y_k = 0$ pour un certain k assez grand.

Exercice 4. Pour tout entier n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable X, à coefficients réels, de degré $\leqslant n$, muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{3n}[X]$ et $f : E \to F$ l'application $f(P) = P^3$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle $Df(P)$ en tout point P de E. Vérifier que f est de classe C^1 sur E.

Correction. Soient $P, H \in E$. On a

$$f(P+H) = \left(P+H\right)^3 = f(P) + 3P^2H + g(H),$$

où

$$g(H) = 3PH^2 + H^3.$$

Or,

$$\|g(H)\| \leqslant 3\|P\| \times \|H\|^2 + \|H\|^3.$$

Ainsi, $g(H) = o(\|H\|)$. Puisque $H \mapsto 3P^2H$ est linéaire (et continue car on est en dimension finie), on a prouvé que f est différentiable en P et que $Df(P).H = 3P^2H$.
On a pour P, Q et H dans E, $\|(Df(P) - Df(Q)H\| = 3\left\|(P^2 - Q^2)H\right\| \leqslant 3\left\|P^2 - Q^2\right\|\|H\|$,
d'où $\|(Df(P) - Df(Q)\| \leqslant 3\left\|P^2 - Q^2\right\| \leqslant (3\|P+Q\|)\|P-Q\|$
Maintenant, si Q est dans la boule centrée en P et de rayon 1,

$$3\|P+Q\| \leqslant 3(\|P\| + (\|Q-P\| + \|P\|)) \leqslant (6\|P\| + 3)$$

d'où $\|(Df(P) - Df(Q)\| \leqslant (6\|P\|+3)\|P-Q\|$, ce qui montre que Df est localement lipschitzienne sur E, donc continue et par suite f est de classe C^1 sur E.

Exercice 5.
1. Soient E, F et G des espaces vectoriel normés. Montrer qu'une application bilinéaire $f : E\times F \to G$ est différentiable si et seulement si elle est continue, et dans ce cas, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $Df(x, y) = f(x, .) + f(., y)$.
2. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. Montrer que l'application $h : E \to \mathbb{R}$ définie par $h(f) = \int_0^1 f^2(t)dt$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Correction. L'espace produit $E \times F$ est muni de la norme $\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$.

1. Le sens direct, f différentiable entraîne f continue est toujours vrai (voir le cours). Maintenant, on suppose que f est une application bilinéaire continue, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$ $\|f(x, y)\|_G \leqslant C\|x\|_E\|y\|_F$. Soit $(x, y) \in E \times F$. Pour tout $(h, k) \in E \times F$, comme f est bilinéaire on a

$$f((x, y) + (h, k)) = f(x + h, y + k)f(x, y) + f(x + h, y) + f(x, y + k) + f(h, k).$$

On définie l'application $L : E \times F \to G$ par $L(h, k) = f(h, y) + f(x, k)$.
Alors, L est linéaire et continue, car $\|L(h, k)\|_G \leqslant C\|h\|_E\|y\|_F + C\|x\|_E\|k\|_F \leqslant C_{(x,y)}\|(h, k)\|_{E\times F}$, avec $C_{(x,y)} = C\|(x, y)\|_{E\times F}$. D'autre part, $\|f(h, k)\|_G \leqslant C\|h\|_E\|k\|_F \leqslant \|(h, k)\|^2_{E\times F} = o(\|(h, k)\|_{E\times F})$. Ainsi, $f((x, y) + (h, k)) = f(x, y) + L(h, k) + o(\|(h, k)\|_{E\times F})$ où L est une application linéaire continue. Alors f est différentiable et a pour différentielle l'application L.

2. Soit $g \in E$, $h(f+g) = \int_0^1 (f+g)^2(t)dt = \int_0^1 (f(t)^2 + 2f(t)g(t) + g^2(t))dt = h(f) + 2\int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 g^2(t)dt$.
   On définit l'application $T : E \to \mathbb{R}$ par $T(g) = 2\int_0^1 f(t)g(t)dt$, elle est linéaire et continue car $T(g) \leqslant 2\|f\|_\infty \|g\|_\infty$ (la norme de T est majorée par $2\|f\|_\infty$). D'autre part, $|\int_0^1 g^2(t)dt| \leqslant \|g\|_\infty^2$ est alors un $o(\|g\|_\infty)$.
   Finalement, $h(f+g) = h(f) + T(g) + o(\|g\|_\infty)$ où T est une application linéaire continue. Alors h est différentiable sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$ et a pour différentielle l'application T.