Calcul différentiel — TD 7

Révision

Exercice 1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note

$$\|P\| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |P(x)| \qquad \text{et} \qquad N(P) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

1. Montrer que $\|\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 2. Soit $E = C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $\phi \in E - \{0\}$, on désigne par T_ϕ, l'application de E to $\mathbb{R}$ définie par $T_\phi(f) = \int_0^\pi \phi(x)f(x)dx$.

1. Montrer que T_ϕ est linéaire et continue et calculer sa norme.
2. Cette norme est-elle atteinte lorsque ϕ est de signe constant ?
3. On pose $F = \{f \in E\ ,\ f(0) = 0\}$ et $\phi = 1$.
   La restriction de T_1 à F est-elle continue ? sa norme est-elle atteinte ?
4. Etudier la continuité de T_ϕ sur $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$.

Exercice 3.

1. Soit N_1 la norme sur $E = \mathbb{R}^n$ définie par $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
   Montrer que N_1 est différentiable en un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ si et seulement si pour tous $i = 1, \dots, n$ $a_i \neq 0$. Calculer dans ce cas $DN_1(a)$.
2. Soit $E = \ell^1(\mathbb{R})$ l'espace des suites de nombres réels $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$, muni de la norme $N_1(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|$.
   Déterminer en quels point N_1 est différentiable.

Exercice 4. Pour tout entier n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable X, à coefficients réels, de degré $\leqslant n$, muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{3n}[X]$ et $f : E \to F$ l'application $f(P) = P^3$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle $Df(P)$ en tout point P de E. Vérifier que f est de classe C^1 sur E.

Exercice 5.

1. Soient E, F et G des espaces vectoriel normés. Montrer qu'une application bilinéaire $f : E \times F \to G$ est différentiable si et seulement si elle est continue, et dans ce cas, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $Df(x, y) = f(x, .) + f(., y)$.
2. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. Montrer que l'application $h : E \to \mathbb{R}$ définie par $h(f) = \int_0^1 f^2(t)dt$ est différentiable et calculer sa différentielle.