Calcul différentiel — TD 7

Espaces de Banach et intégration

Exercice 1. Question de cours. Soit E un espace vectoriel normé et $f : [a,b] \to E$ une fonction. Qu'est-ce qu'une *somme de Riemann* de f ? Donner une condition sur f et E pour que cette somme de Riemann converge dans E.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $x_0 \in E$. Montrer que la fonction $f(t) = g(t) \cdot x_0$ est continue de $[a,b]$ dans E et que $\int_a^b f = \left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot x_0$.

Exercice 3. Soient E un espace de Banach (non nul) et $a < b$ des réels. On munit l'espace vectoriel $C^0([a,b];E)$ de la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b \|f(t)\|_E \,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que l'application $I : f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire continue de $F := (C^0([a,b];E), \|\cdot\|_1)$ dans E. Quelle est sa norme ?
2. Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. On définit la fonction $\chi(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } a \leqslant t < \frac{a+b}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{a+b}{2} \leqslant t \leqslant b \end{cases}$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions $f_n \in F$ telle que $\int_a^b \|f_n(t) - \chi(t)\| \,\mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to \infty$.
3. Montrer que la suite f_n est de Cauchy dans F.
4. Montrer que F n'est pas un espace de Banach.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Soit $R > 0$.

1. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (R\cos t, R\sin t)$. Calculer
$$\int_0^\pi \left\|f'(t)\right\|_2 \mathrm{d}t$$
2. Soit $g : [-R,R] \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(s) = (s, \sqrt{R^2 - s^2})$. Calculer
$$\int_{-R}^R \left\|g'(s)\right\|_2 \mathrm{d}s.$$
3. Qu'ont f et g en commun qui pourrait expliquer la comparaison entre ces deux calculs ?
4. Soit E un espace vectoriel normé et $\gamma : [a,b] \to E$ un chemin de classe C^1. On appelle
$$\ell(\gamma) := \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| \mathrm{d}t$$
la « longueur du chemin γ ».
Soit $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une application C^1 monotone et surjective. Que vaut $\phi(\alpha)$? $\phi(\beta)$? Montrer que $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \phi)$, c'est-à-dire que $\int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \|(\gamma \circ \phi)'(s)\| \,\mathrm{d}s\,.$