Calcul différentiel — TD 6 avec corrections

Différentielles partielles

Exercice 1. Question de cours. Soient $(X_1, E_1), (X_2, E_2), (X_3, E_3), (Y, F)$ des espaces affines normés. (Les E_j et F désignent les espaces vectoriels associés). Soit $f : X_1 \times X_2 \times X_3 \to Y$. Définir la « différentielle partielle de f par rapport à sa deuxième variable ». Donner une condition suffisante pour que cette différentielle existe.

Correction. La différentielle partielle de f par rapport à sa deuxième variable, au point $a = (a_1, a_2, a_3)$, est la différentielle, lorsqu'elle existe, de l'application $x_2 \mapsto f(a_1, x_2, a_3)$ au point $x_2 = a_2$. On la note $D_2 f(a)$ ou $\partial_2 f(a)$ ou $\partial_{x_2} f(a)$. C'est une application linéaire continue de E_2 dans F.
Si f est différentiable en a, alors les différentielles partielle existent en a. La réciproque est fausse en général.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f admet des différentielles partielles en $(0,0)$ mais n'y est pas différentiable.

Correction. Les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ étant identiquement nulles, elles sont différentiables en tout point x en en tout point y, respectivement. En particulier pour $x = y = 0$, on voit que f admet des différentielles partielles en $(0,0)$. Cependant f n'est pas continue en $(0,0)$: en effet $f(x,x) = 1/2$ pour $x \neq 0$, qui ne tend pas vers 0 lorque $x \to 0$. Elle ne peut donc pas être différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Etudier successivement la continuité de f, l'existence et la continuité des dérivées partielles de f, la différentiabilité de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Correction. Notons $\mathcal{D}$ le complémentaire de $\{y = 0\}$. f est clairement continue sur $\mathcal{D}$, « par opérations usuelles ». Ici, ces opérations usuelles peuvent s'exprimer comme suit :

- La fonction $(x,y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- La fonction $(x,y) \mapsto y$ est continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et la fonction $y \mapsto \frac{1}{y}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc par composition, la fonction $(x,y) \mapsto 1/y$ est continue sur $\mathcal{D}$.

— Donc, par produit, la fonction $(x,y) \mapsto x/y$ est continue sur $\mathcal{D}$.

— Donc, par composition, $(x,y) \mapsto \sin \frac{x}{y}$ est continue sur $\mathcal{D}$.

— Donc, par produit, $(x,y) \mapsto y^2 \sin \frac{x}{y}$ est continue sur $\mathcal{D}$.

De même, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ lorsque $y \neq 0$, et sa dérivée s'exprime au moyen de fonctions usuelles, donnant lieu à une dérivée partielle

$$\partial_x f(x,y) = y \cos \frac{x}{y}$$

continue sur $\mathcal{D}$.
Par théorèmes usuels, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donnant

$$\partial_y f(x,y) = 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}$$

qui, là encore, est continue sur $\mathcal{D}$.
Par théorème du cours, les continuités de ces dérivées partielles sur l'ouvert $\mathcal{D}$ impliquent que f est C^1 sur $\mathcal{D}$ (en donc, en particulier, différentiable sur $\mathcal{D}$).

Remarque importante. *Comme $x \mapsto f(x,y)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, **on identifie sa différentielle et sa dérivée**.*
*De façon générale, soit $g : I \to \mathbb{R}$ où I est un ouvert de $\mathbb{R}$. Sa différentielle $Dg(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc une matrice de taille 1×1, et **on identifie cette matrice avec son unique coefficient** $g'(x) \in \mathbb{R}$.*
*Puisqu'on munit les applications linéaires de la norme subordonnée, on peut voir que cette identification est une **isométrie** :*

$$\|Dg(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \left\|h \mapsto g'(x)h\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \left|g'(x)\right|$$

Ça nous permet d'affirmer que la continuité de $x \mapsto Dg(x)$ est identique à la continuité de $x \mapsto g'(x)$.
On s'autorise donc à écrire que $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ sont des réels !

Continuité de f en $(x_0, 0)$. Lorsque (x,y) tend vers $(x_0,0)$, a fortiori $y \to 0$, donc, puisque $\sin(x/y)$ est borné, $y^2 \sin(x/y) \to 0$. Donc f est continue en ce point.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Différentielles partielles en $(x_0, 0)$. L'application partielle $f_1 : x \mapsto f(x,0)$ est identiquement nulle donc est différentiable, et $\partial_x f(x,0) = f_1'(0) = 0$.
Considérons l'application partielle $f_2 : y \mapsto f(x_0,y)$. On a

$$\frac{f_2(y) - f_2(0)}{y} = y \sin \frac{x}{y}$$

qui tend vers 0 lorsque $y \to 0$, donc f admet une différentielle partielle par rapport à y en $(x_0, 0)$ et on a $\partial_y f(x_0, 0) = 0$.

Continuité des différentielles partielles en $(x_0, 0)$**.** Avec le même argument que pour f ci-dessus, on voit que $(x, y) \mapsto \partial_x f(x, y)$ est continue en $(x_0, 0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$. Pour $y \neq 0$, on a vu $\partial_y f(x, y) = 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}$. Le premier terme a une limite nulle quand $y \to 0$ (et donc quand (x, y) tends vers $(x_0, 0)$) mais pour le deuxième terme, ça dépend de x_0 : si $x_0 = 0$, $\partial_y f(x, y) \to 0$, alors que si $x_0 \neq 0$, $\partial_y f(x, y) \to 0$ n'a pas de limite.
Conclusion, $\partial_x f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais $\partial_y f$ est continue seulement sur $\mathcal{D} \cup \{(0, 0)\}$.

Différentiabilité de f **en** $(x_0, 0)$**.** On ne peut pas conclure directement, mais si f était différentiable, sa différentielle serait :

$$Df(x_0, 0)(h, k) = \partial_x f(x_0, 0)h + \partial_y f(x_0, 0)k = 0 + 0 = 0.$$

Montrons que c'est bien le cas :

$$f(x_0 + h, 0 + k) - f(x_0, 0) = f(x_0 + h, k) = k^2 \sin \frac{x_0 + h}{k}.$$

Or $k^2 \sin \frac{x_0+h}{k} = \mathcal{O}(|k|^2) = o(|k|) = o(\|(h, k)\|)$. Donc f est bien différentiable en $(x_0, 0)$ et sa différentielle est bien l'application linéaire nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application :

$$g(u, v) = f(\cos u + \sin v, \, \sin u + \cos v, \, e^{u-v}) \, .$$

1. Montrer que g est de classe C^1 .
2. On suppose que f est différentiable au point $A = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, et que sa différentielle en ce point est, en convenant d'identifier une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ avec sa matrice,
$$Df(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \, .$$
Déterminer la différentielle de g au point $B = (\pi/2, \pi/2)$.

Correction.

Exercice 5. Soit N_1 la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, .$$

Montrer que N_1 est différentiable en un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si pour tous $i = 1, \ldots, n$ $a_i \neq 0$. Calculer dans ce cas $DN_1(a)$.

Correction.