Calcul différentiel — TD 6 avec corrections

Différentielles partielles

Exercice 1. Question de cours. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f admet des différentielles partielles en $(0,0)$ mais n'y est pas différentiable.

Correction. Les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ étant identiquement nulles, elles sont différentiables en tout point x en en tout point y, respectivement. En particulier pour $x = y = 0$, on voit que f admet des différentielles partielles en $(0,0)$. Cependant f n'est pas continue en $(0,0)$: en effet $f(x,x) = 1/2$ pour $x \neq 0$, qui ne tend pas vers 0 lorque $x \to 0$. Elle ne peut donc pas être différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Etudier successivement la continuité de f, l'existence et la continuité des dérivées partielles de f, la différentiabilité de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Correction. Notons $\mathcal{D}$ le complémentaire de $\{y = 0\}$. f est clairement continue sur $\mathcal{D}$, « par opérations usuelles ». Ici, ces opérations usuelles peuvent s'exprimer comme suit :

— La fonction $(x,y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

— La fonction $(x,y) \mapsto y$ est continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et la fonction $y \mapsto \frac{1}{y}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc par composition, la fonction $(x,y) \mapsto 1/y$ est continue sur $\mathcal{D}$.

— Donc, par produit, la fonction $(x,y) \mapsto x/y$ est continue sur $\mathcal{D}$.

— Donc, par composition, $(x,y) \mapsto \sin \frac{x}{y}$ est continue sur $\mathcal{D}$.

— Donc, par produit, $(x,y) \mapsto y^2 \sin \frac{x}{y}$ est continue sur $\mathcal{D}$.

De même, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ lorsque $y \neq 0$, et sa dérivée s'exprime au moyen de fonctions usuelles, donnant lieu à une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cos \frac{x}{y}$$

continue sur $\mathcal{D}$. (Rappel : f étant à valeurs réelles, ses dérivées partielles par rapport à x ou y en chaque point (x,y) sont juste des nombres réels.)

Par théorèmes usuels, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donnant

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}$$

qui, là encore, est continue sur $\mathcal{D}$.
Par théorème du cours, les continuités de ces dérivées partielles sur l'ouvert $\mathcal{D}$ impliquent que f est C^1 sur $\mathcal{D}$ (en donc, en particulier, différentiable sur $\mathcal{D}$).

Continuité de f en $(x_0, 0)$. Lorsque (x,y) tend vers $(x_0,0)$, a fortiori $y \to 0$, donc, puisque $\sin(x/y)$ est borné, $y^2 \sin(x/y) \to 0$. Donc f est continue en ce point.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Différentielles partielles en $(x_0, 0)$. L'application partielle $f_1 : x \mapsto f(x,0)$ est identiquement nulle donc est différentiable, et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = f_1'(0) = 0$.
Considérons l'application partielle $f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$. On a

$$\frac{f_2(y) - f_2(0)}{y} = y \sin \frac{x}{y}$$

qui tend vers 0 lorsque $y \to 0$, donc f admet une différentielle partielle par rapport à y en $(x_0,0)$ et on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$.

Continuité des différentielles partielles en $(x_0, 0)$. Avec le même argument que pour f ci-dessus, on voit que $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(x_0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $y \neq 0$, on a vu $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}$. Le premier terme a une limite nulle quand $y \to 0$ (et donc quand (x,y) tends vers $(x_0,0)$) mais pour le deuxième terme, ça dépend de x_0 : si $x_0 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to 0$, alors que si $x_0 \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to 0$ n'a pas de limite.
Conclusion, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue seulement sur $(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}) \cup \{(0,0)\}$.

Différentiabilité de f en $(x_0, 0)$. On ne peut pas conclure directement, mais si f était différentiable, sa différentielle serait :

$$Df(x_0,0) \cdot (h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) \cdot k = 0 + 0 = 0.$$

Montrons que c'est bien le cas :

$$f(x_0 + h, 0 + k) - f(x_0, 0) = f(x_0 + h, k) = k^2 \sin \frac{x_0 + h}{k}.$$

Or $k^2 \sin \frac{x_0+h}{k} = \mathcal{O}(|k|^2) = o(|k|) = o(\|(h,k)\|)$. Donc f est bien différentiable en $(x_0,0)$ et sa différentielle est bien l'application linéaire nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (\sin(x + y^2)e^{-z}, 1 + x^2 - z)$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la matrice jacobienne de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On la notera $M(x, y, z)$.
3. Exprimer $Df(x, y, z)$ en fonction de $M(x, y, z)$.

Correction.

1. Il suffit de montrer que chaque composante est différentiable. Les deux composantes $f_1(x, y, z) = \sin(x + y^2)e^{-z}$ et $f_2(x, y, z) = 1 + x^2 - z$ ont des dérivées partielles continues (à calculer !) donc par théorème on sait que f_1 et f_2 sont C^1. Donc f est C^1, en particulier f est différentiable.
2. $M(x, y, z)$ est la matrice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$
soit :
$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x + y^2)e^{-z} & 2y\cos(x + y^2)e^{-z} & -\sin(x + y^2)e^{-z} \\ 2x & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
3. $Df(x, y, z)$ est l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est $M(x, y, z)$. Donc pour tout vecteur $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$:
$$Df(x, y, z) \cdot h = M(x, y, z) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application :

$$g(u, v) = f(\cos u + \sin v,\, \sin u + \cos v,\, e^{u-v}).$$

1. Montrer que g est de classe C^1 .
2. On suppose que f est différentiable au point $A = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, et que sa différentielle en ce point est, en convenant d'identifier une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ avec sa matrice,
$$Df(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Déterminer la différentielle de g au point $B = (\pi/2, \pi/2)$.

Correction.

1. L'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h(u,v) = (\cos u + \sin v,\, \sin u + \cos v,\, e^{u-v})$ est de classe C^1, car ses composantes $h_1(u,v) = \cos u + \sin v$, $h_2(u,v) = \sin u + \cos v$ et $h_3(u,v) = e^{u-v}$ sont de classe C^1, par suite $g = f \circ h$ est de classe C^1 comme la composée de deux applications de classe C^1.
2. D'après le théorème de différentiation des applications composées, on a :
$$Dg\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = Df\left(h\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right) \circ Dh\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$
qui se traduit par le produit de matrice $Dg(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = Df(1,1,1) \cdot Dh(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
D'autre part,
$$Dh\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \frac{\partial h_1}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\partial h_2}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \frac{\partial h_2}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\partial h_3}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \frac{\partial h_3}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ e^0 & -e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
d'où
$$Dg\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit N_1 la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par
$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,.$$
Montrer que N_1 est différentiable en un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si pour tous $i = 1, \ldots, n$ $a_i \neq 0$. Calculer dans ce cas $DN_1(a)$.

Correction.

1. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'application $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ défine par $h_i(x) = |x_i|$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{U} = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$, comme la composée de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = |t|$ et de la projection $P_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $h_i = g \circ P_i$. Ainsi $N_1 = \sum_{i=1}^n h_i$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{U} = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$.
Réciproquement, si $a = (a_1, \ldots, a_n) \notin \mathcal{U}$, $a_i = 0$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, n\}$. L'application partielle par rapport à la variable x_i au point a, est l'application $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_i(t) = |t| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_i|$. Elle n'est pas dérivable en $t = 0$, par suite N_1 ne sera pas différentiable au point a.
On a donc montré que N_1 est différentiable en un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si $a \in \mathcal{U}$.

2. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i \neq 0$. Comme N_1 est différentiable en a, ses différentielles partielles existent et on a la relation suivante,

$$DN_1(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} DN_1(a)h_i\,.$$

On a $D_i N_1(a) = Df_i(a_i) = Dg(a_i)$. Puisque, pour $t \neq 0$, $g'(t) = \operatorname{sgn}(t) = t/\left|t\right|$ (le signe de t), on obtient, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$DN_1(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(a_i)h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{|a_i|}h_i\,.$$