Calcul différentiel — TD 6

Différentielles partielles

Exercice 1. Question de cours. Soient $(X_1, E_1), (X_2, E_2), (X_3, E_3), (Y, F)$ des espaces affines normés. (Les E_j et F désignent les espaces vectoriels associés). Soit $f : X_1 \times X_2 \times X_3 \to Y$. Définir la « différentielle partielle de f par rapport à sa deuxième variable ». Donner une condition suffisante pour que cette différentielle existe.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f admet des différentielles partielles en $(0,0)$ mais n'y est pas différentiable.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Etudier successivement la continuité de f, l'existence et la continuité des dérivées partielles de f, la différentiabilité de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application :

$$g(u,v) = f(\cos u + \sin v,\, \sin u + \cos v,\, e^{u-v})\,.$$

1. Montrer que g est de classe C^1 .
2. On suppose que f est différentiable au point $A = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$, et que sa différentielle en ce point est, en convenant d'identifier une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ avec sa matrice,
$$Df(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Déterminer la différentielle de g au point $B = (\pi/2, \pi/2)$.

Exercice 5. Soit N_1 la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ .$$

Montrer que N_1 est différentiable en un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si pour tous $i = 1, \ldots, n$ $a_i \neq 0$. Calculer dans ce cas $DN_1(a)$.