Calcul différentiel — TD 5 avec corrections

Différentielle

Exercice 1. Question de cours. Soient X, Y des espaces affines normés, et $f : X \to Y$. Définir « f est différentiable sur X. »

Correction. Soient E, F les EVN associés à X, Y. L'application f est différentiable sur X si pour tout $a \in X$, il existe une application linéaire continue $A_a : E \to F$ telle que

$$f(a+h) - f(a) = A_a(h) + o(||h||), \qquad h \to 0\,.$$

Exercice 2. Question de cours. *Différentielle d'une application affine.* Soient X, Y des espaces affines normés, d'espaces vectoriels E, F respectivement. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Soit $A \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On définit l'application $f : X \to Y$ par :

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0)$$

Montrer que f est différentiable sur X et calculer sa différentielle.

Correction. Pour $a \in X$ fixé, on calcule $f(a+h) - f(a) = A(h)$. Puisque A est linéaire et continue par hypothèse, on en déduit que f est différentiable en a, et par unicité de la différentielle, que $Df(a) = A$. La différentielle ne depend donc pas de a !

Exercice 3. Soit E, F, G des EVN et $u : G \to E$ tel que $u(h) = \mathcal{O}(h)$ quand $h \to 0$. En écrivant précisément les définitions, montrer que pour toute fonction $f : E \to F$ telle que $f(u) = o(u)$ lorsque $u \to 0$, alors $f(u(h)) = o(h)$ lorsque $h \to 0$.

Correction. On rappelle que $f(u) = o(u)$ si et seulement si $f(u)/\|u\| \to 0$ quand $u \to 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \|u\| < \alpha \Rightarrow \|f(u)\| < \varepsilon \|u\| \tag{1}$$

Remarque : donc $f(u) = o(h)$ est équivalent à $\|f(u)\| = o(\|u\|)$.

Le fait que $u(h) = \mathcal{O}(h)$ dit que, dans un voisinage V de $h = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u(h)\| \leqslant C \|h\|\,, \qquad \forall h \in V\,. \tag{2}$$

On veut montrer $f(u(h)) = o(h)$. Fixons donc $\varepsilon' > 0$. Pour $\varepsilon = \varepsilon'/C$ on applique (1), puis on pose $\alpha' = \alpha/C$.
Donc dès que $\|h\| < \alpha'$, on trouve par (2) que $\|u(h)\| < \alpha$, et donc par (1) que $\|f(u(h))\| < \varepsilon \|u(h)\|$. En appliquant (2) une nouvelle fois, $\varepsilon \|u(h)\| \leqslant \varepsilon' \|h\|$. On a donc bien

$$\|h\| < \alpha' \Rightarrow \|f(u(h))\| < \varepsilon'$$

ce qui montre que $f(u(h)) = o(h)$ pour $h \to 0$.

Exercice 4. Pour tout entier n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable X, à coefficients réels, de degré $\leqslant n$, muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{3n}[X]$ et $f : E \to F$ l'application $f(P) = P^3$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle $Df(P)$ en tout point P de E. Vérifier que f est de classe C^1 sur E.

Correction. Soient $P, H \in E$. On a

$$f(P+H) = \big(P+H\big)^3 = f(P) + 3P^2H + g(H),$$

où

$$g(H) = 3PH^2 + H^3.$$

Or,

$$\|g(H)\| \leqslant 3\|P\| \times \|H\|^2 + \|H\|^3.$$

Ainsi, $g(H) = o(\|H\|)$. Puisque $H \mapsto 3P^2H$ est linéaire (et continue car on est en dimension finie), on a prouvé que f est différentiable en P et que $Df(P).H = 3P^2H$.
On a pour P, Q et H dans E, $\|(Df(P) - Df(Q))H\| = 3\left\|(P^2 - Q^2)H\right\| \leqslant 3\left\|P^2 - Q^2\right\|\|H\|$,
d'où $\|Df(P) - Df(Q)\| \leqslant 3\left\|P^2 - Q^2\right\| \leqslant (3\|P+Q\|)\|P-Q\|$
Maintenant, si Q est dans la boule centrée en P et de rayon 1,

$$3\|P+Q\| \leqslant 3(\|P\| + (\|Q-P\| + \|P\|)) \leqslant (6\|P\| + 3)$$

d'où $\|Df(P) - Df(Q)\| \leqslant (6\|P\| + 3)\|P-Q\|$, ce qui montre que Df est localement lipschitzienne sur E, donc continue et par suite f est de classe C^1 sur E.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé et N sa norme.

1. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2. Soit $a \in E$, $a \neq 0$. On suppose N différentiable en a. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, N est différentiable au point λa et que $DN(\lambda a) = DN(a)$. En considérant la dérivée de l'application $\lambda \mapsto N(\lambda a)$, montrer que $DN(a) \cdot a = N(a)$. Démontrer alors que $\|DN(a)\| = 1$.
3. On suppose l'espace vectoriel E réel, et muni d'un produit scalaire $(x,y) \mapsto \langle x, y\rangle$. On note $N(x) = \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ la norme associée. Montrer que N est différentiable en tout point $a \neq 0$ et calculer $DN(a)$.

Correction.

1. Si N était différentiable en 0 on aurait $A \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ telle que

$$N(x) = Ax + o(x) \text{ quand } x \to 0$$

Donc, fixant $x \neq 0$, puisque $tx \to 0$ quand $\mathbb{R} \ni t \to 0$, on a pour $t \neq 0$,

$$\frac{N(tx)}{t} = \frac{A(tx)}{t} + \frac{o(tx)}{t} = Ax + o(1) \qquad t \to 0$$

Donc $\frac{N(tx)}{t} \to Ax$ quand $t \to 0$. Or on sait par les axiomes de la norme que $\frac{N(tx)}{t} = \frac{|t|}{t}N(x)$, qui n'a pas de limite quand $t \to 0$. Contradiction.

2. Par hypothèse, on a $N(a+h)-N(a)-DN(a).h=o(h)$, alors pour $\lambda>0$ on aura $N(\lambda a+h)-N(\lambda a)-DN(a).h=\lambda\left(N(a+\frac{h}{\lambda})-N(a)-DN(a).\frac{h}{\lambda}\right)=\lambda.o(\frac{h}{\lambda})=o(h)$, ainsi on prouvé que N est différentiable au point λa et que $DN(\lambda a)=DN(a)$.
   Soit $g:\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^+$, définie par $g(\lambda)=N(\lambda a)$. L'application g est différentiable sur $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ comme composée des applications différentiables, N et $h:\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\to E$, $h(\lambda)=\lambda a$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, $g'(\lambda)=DN(\lambda a)\cdot a$.
   D'autre part, $g(\lambda)=N(\lambda a)=\lambda N(a)$, nous donne $g'(\lambda)=N(a)$, ainsi $DN(a)\cdot a=N(a)$.
   Maintenant, $N(a)=DN(a)\cdot a$, entraîne $N(a)\leqslant\|DN(a)\|\,N(a)$ et comme $a\neq 0$, $N(a)>0$ et par suite en divisant les deux membres de l'inégalité par $N(a)$ on obtient l'inégalité $\|DN(a)\|\geqslant 1$.
   Finalement, soit $h\in E$ tel que $N(h)=1$. Comme N est une norme

$$\left|\frac{N(a+th)-N(a)}{t}\right|\leqslant\left|\frac{N((a+th)-a)}{t}\right|=\left|\frac{N(th)}{t}\right|=N(h)$$

   et N est différentiable en a, nous donne lorsque t tend vers 0, $|DN(a).h|\leqslant N(h)=1$ d'où

$$\|DN(a)\|=\sup_{\{h,\,N(h)=1\}}|DN(a).h|\leqslant 1$$

   Ainsi $\|DN(a)\|=1$.
3. On a pour $x\in E$, $N(x)=\langle x,x\rangle^{1/2}=g\circ f(x)$, avec $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $g(t)=\sqrt{t}$ différentiable (même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ et $f:E\to\mathbb{R}$, $f(x)=\langle x,x\rangle$ est forme bilinéaire continue donc différentiable (même de classe C^∞) sur E : en effet,

$$\langle x+h,x+h\rangle=\langle x,x\rangle+2\langle x,h\rangle+\langle h,h\rangle,$$

   et $\langle h,h\rangle=o(h)$, tandis que $h\mapsto 2\langle x,h\rangle$ est bien linéaire et continue (pourquoi ?). Donc pour tout $x\in E$, $Df(x)=2\langle x,\cdot\rangle$. De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$, $g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, N est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ et pour $a\neq 0$

$$DN(a)=g'(f(a))(Df(a))=\frac{1}{2\sqrt{f(a)}}(2\langle a,\cdot\rangle)=\frac{\langle a,\cdot\rangle}{\sqrt{\|a\|^2}}=\frac{\langle a,\cdot\rangle}{\|a\|}$$

   i.e. pour tout $h\in E$, $DN(a)\cdot h=\frac{\langle a,h\rangle}{\|a\|}$.

Exercice 6. Considérons l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^6}{x^8+(y-x^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue à l'origine.

2. Montrer que f est différentiable au sens de Gateaux à l'origine.
3. Montrer que f n'est pas différentiable à l'origine (au sens de Fréchet).

Correction.

1. Le long de la courbe $y = x^2$ on a $f(x, x^2) = 1/x^2$ qui n'a pas de limite quand $x \to 0$, ce qui exclut la continuité de f en $(0, 0)$.
2. Il s'agit de montrer que la dérivée directionnelle $\mathcal{L}_h f(0)$ existe pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ et que l'application $h \mapsto \mathcal{L}_h f(0)$ est linéaire et continue : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On calcule donc, avec $h = (u, v) \neq (0, 0)$ et $t \neq 0$,

$$\frac{f(0 + tu, 0 + tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^5 u^6}{t^8 u^8 + t^2 (v - tu^2)^2}.$$

   Si $u = 0$, c'est nul, sinon, cette quantité est équivalente quand $t \to 0$:
   - si $v \neq 0$, à $\frac{t^3 u^6}{v^2}$
   - si $v = 0$, à tu^2,

   donc dans tous les cas la limite quand $t \to 0$ est nulle. La dérivée directionnelle existe et est donc $\mathcal{L}_h f(0) = 0$ pour tout h, ce qui est bien une application linéaire continue !
3. La différentiabilité usuelle implique la continuité, donc f ne peut pas être différentiable en 0.