Calcul différentiel — TD 5 avec corrections

Différentielle

Exercice 1. Question de cours. Soient X, Y des espaces affines normés, et $f : X \to Y$. Définir « f est différentiable sur X. »

Correction. Soient E, F les EVN associés à X, Y. L'application f est différentiable sur X si pour tout $a \in X$, il existe une application linéaire continue $A_a : E \to F$ telle que

$$f(a+h) - f(a) = A_a(h) + o(||h||), \qquad h \to 0\,.$$

Exercice 2. *Différentielle d'une application affine.* Soient X, Y des espaces affines normés, d'espaces vectoriels E, F respectivement. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Soit $A \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On définit l'application $f : X \to Y$ par :

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0)$$

Montrer que f est différentiable sur X et calculer sa différentielle.

Correction. Pour $a \in X$ fixé, on calcule $f(a+h) - f(a) = A(h)$. Puisque A est linéaire et continue par hypothèse, on en déduit que f est différentiable en a, et par unicité de la différentielle, que $Df(a) = A$. La différentielle ne depend donc pas de a !

Exercice 3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^8 + (y-x^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue à l'origine.
2. Montrer que f est différentiable au sens de Gateaux à l'origine.
3. Montrer que f n'est pas différentiable à l'origine (au sens de Fréchet).

Correction.

1. Le long de la courbe $y = x^2$ on a $f(x, x^2) = 1/x^2$ qui n'a pas de limite quand $x \to 0$, ce qui exclut la continuité de f en $(0,0)$.
2. Il s'agit de montrer que la dérivée directionnelle $\mathcal{L}_h f(0)$ existe pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ et que l'application $h \mapsto \mathcal{L}_h f(0)$ est linéaire et continue : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On calcule donc, avec $h = (u,v) \neq (0,0)$ et $t \neq 0$,

$$\frac{f(0+tu, 0+tv) - f(0,0)}{t} = \frac{t^5 u^6}{t^8 u^8 + t^2 (v - tu^2)^2}\,.$$

Si $u = 0$, c'est nul, sinon, cette quantité est équivalente quand $t \to 0$:

   — si $v \neq 0$, à $\frac{t^3u^6}{v^2}$
   — si $v = 0$, à tu^2,

   donc dans tous les cas la limite quand $t \to 0$ est nulle. La dérivée directionnelle existe et est donc $\mathcal{L}_h f(0) = 0$ pour tout h, ce qui est bien une application linéaire continue !

3. La différentiabilité usuelle implique la continuité, donc f ne peut pas être différentiable en 0.

Exercice 4. Soit E, F, G des EVN et $u : G \to E$ tel que $u(h) = \mathcal{O}(h)$ quand $h \to 0$. En écrivant précisément les définitions, montrer que pour toute fonction $f : E \to F$ telle que $f(u) = o(u)$ lorsque $u \to 0$, alors $f(u(h)) = o(h)$ lorsque $h \to 0$.

Correction. On rappelle que $f(u) = o(u)$ si et seulement si $f(u)/\|u\| \to 0$ quand $u \to 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \|u\| < \alpha \Rightarrow \|f(u)\| < \varepsilon \|u\| \tag{1}$$

Remarque : donc $f(u) = o(h)$ est équivalent à $\|f(u)\| = o(\|u\|)$.

Le fait que $u(h) = \mathcal{O}(h)$ dit que, dans un voisinage V de $h = 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u(h)\| \leqslant C \|h\|, \qquad \forall h \in V. \tag{2}$$

On veut montrer $f(u(h)) = o(h)$. Fixons donc $\varepsilon' > 0$. Pour $\varepsilon = \varepsilon'/C$ on applique (1), puis on pose $\alpha' = \alpha/C$.
Donc dès que $\|h\| < \alpha'$, on trouve par (2) que $\|u(h)\| < \alpha$, et donc par (1) que $\|f(u(h))\| < \varepsilon \|u(h)\|$. En appliquant (2) une nouvelle fois, $\varepsilon \|u(h)\| \leqslant \varepsilon' \|h\|$. On a donc bien

$$\|h\| < \alpha' \Rightarrow \|f(u(h))\| < \varepsilon'$$

ce qui montre que $f(u(h)) = o(h)$ pour $h \to 0$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé et N sa norme.

1. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2. Soit $a \in E$, $a \neq 0$. On suppose N différentiable en a. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, N est différentiable au point λa et que $DN(\lambda a) = DN(a)$. En considérant la dérivée de l'application $\lambda \mapsto N(\lambda a)$, montrer que $DN(a) \cdot a = N(a)$. Démontrer alors que $\|DN(a)\| = 1$.
3. On suppose l'espace vectoriel E réel, et muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. On note $N(x) = \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ la norme associée. Montrer que N est différentiable en tout point $a \neq 0$ et calculer $DN(a)$.

Correction.

1. Si N était différentiable en 0 on aurait $A \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ telle que
$$N(x) = Ax + o(x) \text{ quand } x \to 0$$
Donc, fixant $x \neq 0$, puisque $tx \to 0$ quand $\mathbb{R} \ni t \to 0$, on a pour $t \neq 0$,
$$\frac{N(tx)}{t} = \frac{A(tx)}{t} + \frac{o(tx)}{t} = Ax + o(1) \qquad t \to 0$$
Donc $\frac{N(tx)}{t} \to Ax$ quand $t \to 0$. Or on sait par les axiomes de la norme que $\frac{N(tx)}{t} = \frac{|t|}{t} N(x)$, qui n'a pas de limite quand $t \to 0$. Contradiction.
2. Par hypothèse, on a $N(a+h) - N(a) - DN(a).h = o(h)$, alors pour $\lambda > 0$ on aura $N(\lambda a + h) - N(\lambda a) - DN(a).h = \lambda \left(N(a + \frac{h}{\lambda}) - N(a) - DN(a).\frac{h}{\lambda}\right) = \lambda.o(\frac{h}{\lambda}) = o(h)$, ainsi on prouvé que N est différentiable au point λa et que $DN(\lambda a) = DN(a)$.
Soit $g : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$, définie par $g(\lambda) = N(\lambda a)$. L'application g est différentiable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ comme composée des applications différentiables, N et $h : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to E$, $h(\lambda) = \lambda a$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, $g'(\lambda) = DN(\lambda a) \cdot a$.
D'autre part, $g(\lambda) = N(\lambda a) = \lambda N(a)$, nous donne $g'(\lambda) = N(a)$, ainsi $DN(a) \cdot a = N(a)$.
Maintenant, $N(a) = DN(a) \cdot a$, entraîne $N(a) \leqslant \|DN(a)\| \, N(a)$ et comme $a \neq 0$, $N(a) > 0$ et par suite en divisant les deux membres de l'inégalité par $N(a)$ on obtient l'inégalité $\|DN(a)\| \geqslant 1$.
Finalement, soit $h \in E$ tel que $N(h) = 1$. Comme N est une norme
$$\left|\frac{N(a+th) - N(a)}{t}\right| \leqslant \left|\frac{N((a+th) - a)}{t}\right| = \left|\frac{N(th)}{t}\right| = N(h)$$
et N est différentiable en a, nous donne lorsque t tend vers 0, $|DN(a).h| \leqslant N(h) = 1$ d'où
$$\|DN(a)\| = \sup_{\{h,\, N(h)=1\}} |DN(a).h| \leqslant 1$$
Ainsi $\|DN(a)\| = 1$.
3. On a pour $x \in E$, $N(x) = \langle x, x\rangle^{1/2} = g \circ f(x)$, avec $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{t}$ différentiable (même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, x\rangle$ est forme bilinéaire continue donc différentiable (même de classe C^∞) sur E : en effet,
$$\langle x+h, x+h\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, h\rangle + \langle h, h\rangle,$$
et $\langle h, h\rangle = o(h)$, tandis que $h \mapsto 2\langle x, h\rangle$ est bien linéaire et continue (pourquoi ?). Donc pour tout $x \in E$, $Df(x) = 2\langle x, \cdot\rangle$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, N est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et pour $a \neq 0$
$$DN(a) = g'(f(a))(Df(a)) = \frac{1}{2\sqrt{f(a)}}(2\langle a, \cdot\rangle) = \frac{\langle a, \cdot\rangle}{\sqrt{\|a\|^2}} = \frac{\langle a, \cdot\rangle}{\|a\|}$$
i.e. pour tout $h \in E$, $DN(a) \cdot h = \frac{\langle a, h\rangle}{\|a\|}$.

Exercice 6. Pour tout entier n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable X, à coefficients réels, de degré $\leqslant n$, muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{3n}[X]$ et $f : E \to F$ l'application $f(P) = P^3$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle $Df(P)$ en tout point P de E. Vérifier que f est de classe C^1 sur E.

Correction. Soient $P, H \in E$. On a

$$f(P+H) = \big(P+H\big)^3 = f(P) + 3P^2H + g(H),$$

où

$$g(H) = 3PH^2 + H^3.$$

Or,

$$\|g(H)\| \leqslant 3\|P\| \times \|H\|^2 + \|H\|^3.$$

Ainsi, $g(H) = o(\|H\|)$. Puisque $H \mapsto 3P^2H$ est linéaire (et continue car on est en dimension finie), on a prouvé que f est différentiable en P et que $Df(P).H = 3P^2H$.
On a pour P, Q et H dans E, $\|(Df(P) - Df(Q))H\| = 3\left\|(P^2 - Q^2)H\right\| \leqslant 3\left\|P^2 - Q^2\right\| \|H\|$,
d'où $\|Df(P) - Df(Q)\| \leqslant 3\left\|P^2 - Q^2\right\| \leqslant (3\|P+Q\|)\|P-Q\|$
Maintenant, si Q est dans la boule centrée en P et de rayon 1,

$$3\|P+Q\| \leqslant 3(\|P\| + (\|Q-P\| + \|P\|)) \leqslant (6\|P\| + 3)$$

d'où $\|Df(P) - Df(Q)\| \leqslant (6\|P\| + 3)\|P-Q\|$, ce qui montre que Df est localement lipschitzienne sur E, donc continue et par suite f est de classe C^1 sur E.