Calcul différentiel — TD 5

Différentielle

Exercice 1. Question de cours. Soient X, Y des espaces affines normés, et $f : X \to Y$. Définir « f est différentiable sur X. »

Exercice 2. Question de cours. *Différentielle d'une application affine.* Soient X, Y des espaces affines normés, d'espaces vectoriels E, F respectivement. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Soit $A \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On définit l'application $f : X \to Y$ par :

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0)$$

Montrer que f est différentiable sur X et calculer sa différentielle.

Exercice 3. Soit E, F, G des EVN et $u : G \to E$ tel que $u(h) = \mathcal{O}(h)$ quand $h \to 0$. En écrivant précisément les définitions, montrer que pour toute fonction $f : E \to F$ telle que $f(u) = o(u)$ lorsque $u \to 0$, alors $f(u(h)) = o(h)$ lorsque $h \to 0$.

Exercice 4. Pour tout entier n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable X, à coefficients réels, de degré $\leqslant n$, muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{3n}[X]$ et $f : E \to F$ l'application $f(P) = P^3$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle $Df(P)$ en tout point P de E. Vérifier que f est de classe C^1 sur E.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé et N sa norme.

1. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2. Soit $a \in E$, $a \neq 0$. On suppose N différentiable en a. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, N est différentiable au point λa et que $DN(\lambda a) = DN(a)$. En considérant la dérivée de l'application $\lambda \mapsto N(\lambda a)$, montrer que $DN(a) \cdot a = N(a)$. Démontrer alors que $\|DN(a)\| = 1$.
3. On suppose l'espace vectoriel E réel, et muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. On note $N(x) = \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ la norme associée. Montrer que N est différentiable en tout point $a \neq 0$ et calculer $DN(a)$.

Exercice 6. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^8+(y-x^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue à l'origine.
2. Montrer que f est différentiable au sens de Gateaux à l'origine.
3. Montrer que f n'est pas différentiable à l'origine (au sens de Fréchet).