Calcul différentiel — TD 4 avec corrections

Applications linéaires continues

Exercice 1. Question de cours. Soient E, F des espaces vectoriels normés (réels ou complexes). Donner la caractérisation des applications linéaires continues de E dans F.

Correction. $A \in \mathcal{L}_c(E,F)$ si et seulement si A est linéaire ($A(u+\lambda\cdot v) = A(u)+\lambda\cdot A(v)$ pour tous u, v dans E et tous $\lambda \in \mathbb{R}$) et il existe $C > 0$ tel que $\|Au\|_F \leqslant C\|u\|_E$ pour tous $u \in E$.

Exercice 2. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On admettra que les applications $f \mapsto \|f\|_\infty = \max_{t\in[1,0]}|f(t)|$ et $f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ sont des normes sur E. On considère les applications $\phi_0 : E \to \mathbb{R}$ et $\phi_1 : E \to \mathbb{R}$ données par

$$\phi_0(f) = f(0) \quad \text{et} \quad \phi_1(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que l'application ϕ_1 est linéaire et continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et sur $(E, \|\cdot\|_1)$. On calculera les normes de ϕ_1 dans les deux cas.
2. Montrer que ϕ_0 est linéaire mais pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. ϕ_0 est-elle continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

Correction.

1. ϕ_1 est linéaire par linéarité de l'intégrale. Pour montrer qu'elle est continue, il suffit donc d'appliquer le critère rappelé dans l'exercice 1 : on veut trouver une constante C telle que
$$\|\phi_1(f)\| \leqslant C\|f\|\,.$$
Traitons d'abord le cas de $\|\cdot\|_\infty$.
1ère étape : majorer $|\phi_1(f)|$ en fonction de $\|f\|_\infty$. On a clairement
$$|\phi_1(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max|f| \int_0^1 \mathrm{d}t = \|f\|_\infty\,,$$
c'est-à-dire $|\phi_1(f)| \leqslant C\|f\|_\infty$ avec $C = 1$. On sait donc déjà que ϕ_1 **est continue** de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$, et sa norme est $\leqslant 1$.
2ème étape : est-ce que $C = 1$ est optimale ? Il suffit de trouver un f particulier qui réaliste l'égalité. Prenons $f(t) = 1$: ça marche ! Donc $\|\phi_1\|_{\mathcal{L}((E,\|\cdot\|_\infty),\mathbb{R})} = 1$.
Traitons maintenant le cas de $\|\cdot\|_1$. On a directement
$$|\phi_1(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1\,,$$
et l'égalité est également vérifiée pour $f \equiv 1$. Donc ϕ_1 est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $\mathbb{R}$, et sa norme est 1.

2. La linéarité est claire. On applique donc le critère de continuité de l'exercice 1 : il faut montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que $|f(0)| \leqslant C \int_0^1 |f|$ pour tous $f \in E$. Il suffit pour cela de construire une **suite** f_n de fonctions telles que $f_n(0) \to \infty$ et $\int_0^1 |f_n| = 1$. Pensez au graphe d'un triangle rectangle en 0 de base $1/n$ et de hauteur $2n$...
3. Oui, $|f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$.

Exercice 3. On munit $E = \mathbb{R}^n$ de la norme uniforme $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_i |x_i|$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$, qu'on identifiera avec l'application linéaire $E \ni X \mapsto AX \in E$. Calculer sa norme subordonnée en fonction de ses coefficients $(a_{i,j})$.
2. On considère l'application « transposée » de $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ qui à A associe ${}^tA$. Est-elle continue ? Quelle est sa norme ?

Correction.

1. **1ère étape : majorer $\|AX\|$ en fonction de $\|X\|$.** Le i-ème coefficient de AX est
$$(AX)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} x_k \, ,$$
donc
$$\|AX\| = \max_i \left| \sum_k a_{ik} x_k \right| \, .$$
C'est facile de majorer cette quantité en faisant apparaître $\|X\|$, puisque c'est le max des $|x_k|$:
$$\|AX\| \leqslant \max_k |x_k| \max_i \sum_k |a_{ik}| = \|X\| \max_i \sum |a_{ik}| \, .$$
On a donc $\|AX\| \leqslant C\, \|x\|$ avec $C = \max_i \sum |a_{ik}|$.
2ème étape : montrer que C est optimale. Est-ce que notre majoration était assez fine pour que C soit la constante optimale ? Pour cela il faut trouver un X particulier tel que $\|AX\| \geqslant C\, \|X\|$.
Supposons $A \neq 0$ (sinon il n'y a rien à montrer) et prenons l'indice $i = i_0$ pour lequel le $\max_i$ est atteint dans C, c'est-à-dire
$$C = \sum_k |a_{i_0 k}| \, .$$
On cherche donc un X qui vérifierait
$$\left| \sum_k a_{i_0 k} x_k \right| = \sum_k |a_{i_0 k}| \, \|X\| \; ;$$

il suffit de prendre $X = (\text{signe}(a_1), \ldots, \text{signe}(a_n))$ (qui est de norme 1) ! L'égalité ci-dessus est vérifiée, et donc si on reprend le calcul de AX on trouve

$$\|AX\| = \max_i \left| \sum_k a_{ik} x_k \right| \geqslant \left| \sum_k a_{i_0 k} x_k \right| = \sum_k |a_{i_0 k}| \, \|X\| = C \, \|X\| \ .$$

2. C'est une application linéaire en dimension finie (n^2), donc continue. Pour trouver sa norme, il faut trouver la constante C optimale telle quelle

$$\|{}^t A\| \leqslant C \, \|A\| \ .$$

Par la question précédente, on a immédiatement que

$$\|{}^t A\| = \max_k \sum_i |a_{ik}| \ .$$

La majoration la plus naturelle est

$$\max_k \sum_i |a_{ik}| \leqslant \sum_k \sum_i |a_{ik}| = \sum_i \sum_k |a_{ik}| \leqslant \sum_i \|A\| = n \, \|A\| \ .$$

On a donc $\|{}^t A\| \leqslant C \, \|A\|$ avec $C = n$. Est-ce que C est la constante optimale ? Remarquons que $\|A\|$ consiste à sommer les valeurs absolues des coefficients des *lignes* de la matrice A. Cherchons une matrice particulière telle que $\|A\| = 1$ et $\|{}^t A\| = n$. Il suffit de choisir

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \vdots & \quad 0 \quad \\ 1 & \end{array} \right)$$

La norme de l'application « transposée » est donc bien $\|{}^t\|_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R}))} = n$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que $P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i \mapsto \|P\| = \max_i |a_i|$ est une norme sur E.
2. On considère les applications $D : P \mapsto P'$ et $A : P \mapsto XP$ de E dans E. Sont-elles linéaires ? injectives ? surjectives ? continues pour la norme ci-dessus ? (si oui, calculer leurs normes)
3. Mêmes questions pour l'application D mais sur l'espace $F = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$.

Correction.

1. Les conditions pour être une norme sont aisément vérifiées :
   (a) $\forall P \in E$, $\|P\| \geqslant 0$.
   (b) $\|P\| = 0 \iff \max_i |a_i| = 0 \iff |a_i| = 0, \forall i \in \{1, \ldots \deg(P)\} \iff a_i = 0, \forall i \in \{1, \ldots \deg(P)\} \iff P = 0$.

(c) $\forall P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda P\| = \max_i |\lambda a_i| = \max_i |\lambda|\,|a_i| = |\lambda| \max_i |a_i| = |\lambda|\,\|P\|$.

(d) Pour $P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{\deg(Q)} b_i X^i$, quitte à ajouter des coefficients nuls lorsque l'indice dépasse le degré du polynôme, on peut écrire

$$P + Q = \sum_{i=0}^{\max(\deg(P),\deg(Q))} (a_i + b_i) X^i \,,$$

donc on a
$\|P+Q\| = \max_i |a_i + b_i| \leqslant \max_i(|a_i| + |b_i|) \leqslant \max_i |a_i| + \max_i |b_i| = \|P\| + \|Q\|$.

2. (a) L'application D est linéaire puisque la dérivée l'est, son noyau $\ker(D)$ est formé des polynômes constants, n'est donc pas réduit à $\{0\}$ par suite D n'est pas injective.

Comme tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i = D\left(\sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i \frac{X^{i+1}}{i+1}\right)$, l'application D est surjective.

Enfin, D n'est pas continue, il suffit pour montrer cela de trouver une suite de polynômes (P_n) bornée pour la norme et dont les dérivées en norme tendent vers $+\infty$. Pour cela, on choisit $P_n = X^n$, on a alors $\|P_n\| = 1$, mais $\|DP_n\| = n$ tends vers $+\infty$.

(b) L'application A est linéaire puisque, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in E^2$ on a $A(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q) = \lambda XP + \mu XQ = \lambda AP + \mu AQ$. Comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau intègre, « $XP = 0 \implies P = 0$ », le noyau $Ker(A)$ est alors réduit à $\{0\}$, d'où A est injective. L'image de A est $X.\mathbb{R}[X] \subsetneq \mathbb{R}[X]$, donc A n'est pas surjective (les polynômes constants ne sont pas dans l'image).

Pour tout $P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i$, on a $\|AP\| = \left\|\sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^{i+1}\right\| = \|P\|$, ainsi A est continue et $\|A\| = 1$.

3. F est un s.e.v. de dimension finie de E, l'application $D : F \to F$ est bien définie (la dérivation fait baisser le degré), est encore linéaire, n'est pas injective (comme au-dessus), par suite n'est pas surjective, puisque c'est un endomorphisme en dimension finie ; en fait l'image de D est l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degrés $\leqslant n-1$. Enfin, la dimension finie nous garantit la continuité de l'application linéaire D.

On va calculer sa norme ; on a pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$$\|DP\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |i a_i| \leqslant n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| = n\,\|P\| \,.$$

Par conséquent $\|D\| \leqslant n$.

D'autre part, si $P = X^n$, on a alors $\|P\| = 1$ et $\|DP\| = n$, cela montre que $\|D\| \geqslant n$ et donc $\|D\| = n$.