Calcul différentiel — TD 4

Applications linéaires continues

Exercice 1. Question de cours. Soient E, F des espaces vectoriels normés (réels ou complexes). Donner la caractérisation des applications linéaires continues de E dans F.

Exercice 2. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On admettra que les applications $f \mapsto \|f\|_\infty = \max_{t\in[1,0]} |f(t)|$ et $f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ sont des normes sur E. On considère les applications $\phi_0 : E \to \mathbb{R}$ et $\phi_1 : E \to \mathbb{R}$ données par

$$\phi_0(f) = f(0) \quad \text{et} \quad \phi_1(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que l'application ϕ_1 est linéaire et continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et sur $(E, \|\cdot\|_1)$. On calculera les normes de ϕ_1 dans les deux cas.
2. Montrer que ϕ_0 est linéaire mais pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. ϕ_0 est-elle continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

Exercice 3. On munit $E = \mathbb{R}^n$ de la norme uniforme $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_i |x_i|$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$, qu'on identifiera avec l'application linéaire $E \ni X \mapsto AX \in E$. Calculer sa norme subordonnée en fonction de ses coefficients $(a_{i,j})$.
2. On considère l'application « transposée » de $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ qui à A associe ${}^tA$. Est-elle continue ? Quelle est sa norme ?

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que $P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} a_i X^i \mapsto \|P\| = \max_i |a_i|$ est une norme sur E.
2. On considère les applications $D : P \mapsto P'$ et $A : P \mapsto XP$ de E dans E. Sont-elles linéaires ? injectives ? surjectives ? continues pour la norme ci-dessus ? (si oui, calculer leurs normes)
3. Mêmes questions pour l'application D mais sur l'espace $F = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$.