Calcul différentiel – TD 3 avec corrections

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1. Question de cours. Soit X un espace affine normé et $f : \mathbb{R} \to X$, et $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est k fois dérivable en t_0. Donner le développement de Taylor de f en t_0 à l'ordre k.

Correction.

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(t_0) + o(h^k), \qquad h \to 0$$

Exercice 2. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = e^{-1/t^2} \qquad \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et que f est tangente à zéro en l'origine, à tout ordre.
2. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \geqslant 0$, $f^{(k)}(0) = 0$.
3. Calculer le polynôme de Taylor de f à l'ordre k en $t = 0$.
4. Construire une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $g(t) > 0$ pour $t > 0$.
5. En déduire la construction d'une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $h(t) = 0$ pour $|t| \geqslant 1$ et $h(t) > 0$ pour $t \in \,]-1, 1[$.
6. En déduire la construction d'une fonction croissante $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $H(t) = 0$ pour $t \leqslant -1$ et $H(t) = 1$ pour $t \geqslant 1$.

Correction.

1. $t^{-k}e^{-1/t^2} \to 0$ quand $t \to 0$ par croissance comparée.
2. même argument pour le taux d'accroissement et la dérivée, par récurrence, qui ont la forme $R(t)e^{-1/t^2}$ où R est une fraction rationnelle.
3. Il est nul !
4. Comme f mais en imposant 0 sur $\mathbb{R}_-$, les preuves fonctionnent de la même façon.
5. Par exemple $h(t) = g(t+1)g(1-t)$.
6. Par exemple $H(t) = \left(\int_{-\infty}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s\right) . \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\,\mathrm{d}s\right)^{-1}$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to E$ de classe C^2 est tangente à zéro en 0 à l'ordre 2 si et seulement si f ainsi que ses deux premières dérivées s'annulent en 0.

Correction. Comme f est de classe C^2, on a la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 :

$$f(h) = f(0) + h \cdot f^{'}(0) + \frac{h^2}{2} \cdot f^{''}(0) + o(h^2).$$

Maintenant, si $f(0)$, $f^{'}(0)$ et $f^{''}(0)$ sont nuls, alors $f(h) = o(h^2)$, donc f est tangente à 0 à l'ordre 2 en 0.
Réciproquement, si f est tangente à 0 à l'ordre 2 en 0, alors $f(0) = \lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} o(h^2) = 0$ et $f^{'}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{o(h^2)}{h} = 0$. Pour terminer, la formule de Taylor se réduit à $f(h) = \frac{h^2}{2} f^{''}(0) + o(h^2)$, on en déduit que $\frac{h^2}{2} f^{''}(0) = o(h^2)$, nécessairement $f^{''}(0) = 0$.

Exercice 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = t^3 \cos(1/t^2) \qquad \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?
3. f est-elle tangente à 0 à l'ordre 2 en $t = 0$?

Correction.

1. Le taux d'accroissement tend vers 0, donc $f'(0) = 0$.
2. Non, la dérivée (à calculer !) n'est pas continue en 0.
3. Oui, on le vérifie directement.

Exercice 5. Soit X un espace affine normé, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to X$ une fonction $k+1$ fois dérivable, pour un $k \geqslant 1$. Pour $a < b$ fixés dans I, posons $h = b - a$ et, pour $t \in [0,1]$,

$$F(t) = f(a+th) + \sum_{j=1}^{k} h^j \frac{(1-t)^j}{j!} \cdot f^{(j)}(a+th)\,.$$

Montrer que F est dérivable et

$$F'(t) = h^{k+1} \frac{(1-t)^k}{k!} \cdot f^{(k+1)}(a+th)\,.$$

En déduire une preuve de la formule de Taylor avec reste de Lagrange.

Correction. Dériver chaque terme de la somme puis remarquer que c'est téléscopique :
Par dérivation des fonctions composées, $(f(a+th))' = h \cdot f'(a+th)$, et de même $(f^{(j)}(a+th))' = hf^{(j+1)}(a+th)$. Donc par dérivation d'un produit (= formule de Leibniz)

$$\left(h^j \frac{(1-t)^j}{j!} f^{(j)}(a+th)\right)' = -h^j \frac{(1-t)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j)}(a+th) + h^{j+1} \frac{(1-t)^j}{j!} f^{(j+1)}(a+th)$$

En sommant tout, ça se téléscope, il reste le dernier terme.
On a donc

$$\left\|F'(t)\right\| \leqslant h^{k+1}\frac{(1-t)^k}{k!}M$$

avec $M = \sup_{[a,a+h]}\left\|f^{(k+1)}(a+th)\right\|$. Par les accroissements finis on en déduit

$$\|F(1)-F(0)\| \leqslant \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}M\,.$$