Calcul différentiel – TD 3

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1. Question de cours. Soit X un espace affine normé et $f : \mathbb{R} \to X$, et $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est k fois dérivable en t_0. Donner le développement de Taylor de f en t_0 à l'ordre k.

Exercice 2. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = e^{-1/t^2} & \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et que f est tangente à zéro en l'origine, à tout ordre.
2. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \geqslant 0$, $f^{(k)}(0) = 0$.
3. Calculer le polynôme de Taylor de f à l'ordre k.
4. Construire une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $g(t) > 0$ pour $t > 0$.
5. En déduire la construction d'une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $h(t) = 0$ pour $|t| \geqslant 1$ et $h(t) > 0$ pour $t \in \,]-1, 1[$.
6. En déduire la construction d'une fonction croissante $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $H(t) = 0$ pour $t \leqslant -1$ et $H(t) = 1$ pour $t \geqslant 1$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to E$ de classe C^2 est tangente à zéro en 0 à l'ordre 2 si et seulement si f ainsi que ses deux premières dérivées s'annulent en 0.

Exercice 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = t^3 \cos(1/t^2) & \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?
3. f est-elle tangente à 0 à l'ordre 2 ?

Exercice 5. Soit X un espace affine normé, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to X$ une fonction $k+1$ fois dérivable, pour un $k \geqslant 1$. Pour $a < b$ fixés dans I, posons $h = b - a$ et, pour $t \in [0, 1]$,

$$F(t) = f(a + th) + \sum_{j=1}^{k} h^j \frac{(1-t)^j}{j!} \cdot f^{(j)}(a + th)\,.$$

Montrer que F est dérivable et

$$F'(t) = h^{k+1} \frac{(1-t)^k}{k!} \cdot f^{(k+1)}(a + th)\,.$$

En déduire une preuve de la formule de Taylor avec reste de Lagrange.